Soluzioni

1. Massimo e minimo esistono per il teorema di Weierstrass.
Ricerca dei punti di massimo o minimo assoluto.

- Punti singolari interni al dominio: non esistono
- Punti stazionari interni:

$\nabla f = \left(e^x (y^2 - x - 1), \ 2e^x y \right)$

$\nabla f = 0$ nel punto $(-1,0)$, che è interno; $f(-1,0) = 1/e$

- Studio sulla frontiera: con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange siamo ricondotti a cercare i punti stazionari della funzione $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (y^2 - x)e^x + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$.

Questo porta al sistema:

$$\begin{cases} e^x(y^2 - x - 1) + 2\lambda x = 0 \\ 2ye^x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si deduce $y = 0$ oppure $\lambda = -e^x$, da cui:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y^2 - 3x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

(il valore di λ è inessenziale)

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 2 \end{cases} \quad \text{opp.} \quad \begin{cases} x = -4 \\ \text{non accettabile} \end{cases}$$

$f(\sqrt{5},0) = -\sqrt{5}e^{\sqrt{5}}$

$f(-\sqrt{5},0) = \sqrt{5}e^{-\sqrt{5}}$

$f(1,2) = 3e$

$f(1,-2) = 3e$

In conclusione:

$\max f = 3e$ assunto in $(1,\pm 2)$

$\min f = -\sqrt{5}e^{\sqrt{5}}$ assunto in $(\sqrt{5},0)$.

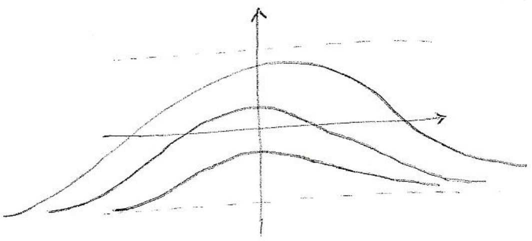
Metodo alternativo (in questo caso, più semplice).
Sulla frontiera è $y^2 = 5 - x^2$.
Ci riconduciamo a studiare la funzione $\varphi(x) = (5 - x - x^2)e^x$ per $x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.
Non riportiamo i calcoli successivi (che non presentano difficoltà).

2.
La funzione $f(x,y) = x(y^2 - 1)$ è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.
$f_y = 2xy$ è localmente limitata.
Questo garantisce esistenza e unicità locale per il problema con condizione iniziale.
Le funzioni $y = \pm 1$ sono soluzioni costanti.
Per $y \neq \pm 1$, separando le variabili e integrando, si ottiene

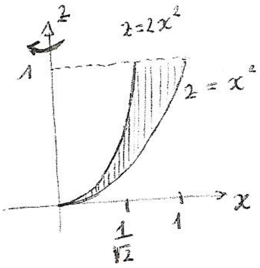
$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s^2-1} = \int_{x_0}^{x} s\, ds \implies \frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{x^2-c}{2} \implies \left|\frac{y-1}{y+1}\right| = K e^{x^2} \quad (K>0)$$

Se $y \in (-1,1)$ si ottiene $y = \dfrac{1-Ke^{x^2}}{1+Ke^{x^2}}$.

Le soluzioni sono definite se $\left|\dfrac{1-Ke^{x^2}}{1+Ke^{x^2}}\right| < 1$, e questo accade $\forall x \in \mathbb{R}$.



3.



Il dominio V richiesto si ottiene ruotando attorno all'asse z la regione nella figura a fianco. Per motivi di simmetria, il baricentro di V è sull'asse delle z. La sua quota è data da:

$$\bar{z} = \frac{\iiint z \, dV}{\mathrm{vol}\, V}$$

Poichè per la regione piana assegnata è $x = \sqrt{z}$, $x = \sqrt{z/2}$,

(a) il volume del solido di rotazione è dato da:

$$\mathrm{vol}\, V = \pi \int_0^1 \left(z - \frac{z}{2}\right) dz = \pi \left[\frac{z^2}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(b)
$$\iiint_V z\, dV = \iint_{x^2+y^2 \le \frac{1}{2}} dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} z\, dz + \iint_{\frac{1}{2} \le x^2+y^2 \le 1} dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{1} z\, dz$$

$$= \frac{3}{2} \iint_{x^2+y^2 \le \frac{1}{2}} (x^2+y^2)^2\, dx\,dy + \frac{1}{2} \iint_{\frac{1}{2} \le x^2+y^2 \le 1} \left(1 - (x^2+y^2)^2\right) dx\,dy$$

Passando a coordinate polari:

$$\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/\sqrt{2}} r^5\, dr + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (1 - r^4)\, r\, dr = \dots = \frac{\pi}{6}$$

In conclusione, $\bar{z}_G = \dfrac{2}{3}$.

4.

Per il teorema della divergenza $\iiint_B \operatorname{div} F \, dV = \iint_\sigma F \cdot N \, d\sigma$,

essendo F un campo vettoriale di classe C^1 sul dominio $B \subset R^3$ delimitato dalla superficie σ avente N come versore normale esterno.

Nel nostro caso deve essere

$$F \cdot \frac{X}{R} = x^2 + y^2.$$

Possiamo dunque scegliere $F = R(x, y, 0)$.

Poichè $\operatorname{div} F = 2R$, il primo membro dell'uguaglianza diventa:

$$2R \iiint_B dV = 2R \operatorname{vol} B = \frac{8}{3}\pi R^4.$$

Verifichiamo che anche l'integrale di superficie assume questo valore.

Parametrizzando la superficie sferica in coordinate polari, si ottiene con le consuete notazioni:

$$\Phi_\varphi \wedge \Phi_\theta = (R^2 \operatorname{sen}^2\varphi \cos\theta, \; R^2 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta, \; R^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi)$$

$$\| \Phi_\varphi \wedge \Phi_\theta \| = R^2 \operatorname{sen}\varphi.$$

L'integrale da calcolare diventa:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} R^4 \operatorname{sen}^3\varphi \, d\varphi = 2\pi R^4 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \, (1 - \cos^2\varphi) \, d\varphi.$$

Ponendo $\cos\varphi = t$, $-\operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = dt$:

$$2\pi R^4 \int_1^{-1} -(1-t^2) \, dt = 2\pi R^4 \int_{-1}^{1} (1-t^2) \, dt = \dots = \frac{8}{3}\pi R^4.$$