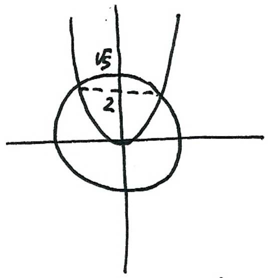
Soluzioni

1.



$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ 2(x^2+y^2)=z \end{cases} \to 2z^2+z-10=0 \to \begin{array}{ll} z=-5/2 & \text{non accettabile} \\ z=2 & \text{soluzione} \end{array}$$

- Calcolo del volume (per sezioni)

$$\int_0^2 dz \iint_{x^2+y^2\le \frac{z}{2}} dx\,dy + \int_2^{\sqrt5} dz \iint_{x^2+y^2\le 5-z^2} dx\,dy = \pi\int_0^2 \frac{z}{2}\,dz + \pi\int_2^{\sqrt5}(5-z^2)\,dz = \dots = \frac{10\sqrt5-19}{3}$$

Calcolo del volume (per fili)

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} dx\,dy \int_{2(x^2+y^2)}^{\sqrt{5-x^2-y^2}} dz = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\sqrt{5-x^2-y^2}-2(x^2+y^2)\right)dx\,dy = 2\pi\int_0^1 \left(r\sqrt{5-r^2}-2r^3\right)dr =$$

$$= 2\pi\left[-\frac13(5-r^2)^{3/2}-\frac{r^4}{2}\right]_0^1 = \frac{10\sqrt5-19}{3}$$

- Calcolo dell'area

Per la parte di sfera S_1: $\begin{cases} z=\sqrt{5-x^2-y^2} \\ x^2+y^2\le 1 \end{cases} \to \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z=\sqrt{5-r^2} \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{array}$

$$\varphi_r=(\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta,\ -r/\sqrt{5-r^2}),\quad \varphi_\theta=(-r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\cos\theta,\ 0)$$

$$\varphi_r\wedge\varphi_\theta=(r^2\cos\theta/\sqrt{5-r^2},\ r^2\,\mathrm{sen}\,\theta/\sqrt{5-r^2},\ r),\quad \|\varphi_r\wedge\varphi_\theta\|=\sqrt5\,r/\sqrt{5-r^2}$$

$$A_1=2\pi\int_0^1\frac{\sqrt5\,r}{\sqrt{5-r^2}}\,dr \underset{\sqrt{5-r^2}=t}{=} 2\sqrt5\pi\int_2^{\sqrt5}dt = 2\sqrt5(\sqrt5-2)\pi$$

Per la parte di paraboloide S_2: $\begin{cases} z=2(x^2+y^2) \\ x^2+y^2\le 1 \end{cases} \to \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z=2r^2 \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{array}$

$$\varphi_r=(\cos\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta,\ 4r),\quad \varphi_\theta=(-r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r\cos\theta,\ 4r)$$

$$\varphi_r\wedge\varphi_\theta=(-4r^2\cos\theta,\ -4r^2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ r),\quad \|\varphi_r\wedge\varphi_\theta\|=r\sqrt{16r^2+1}$$

$$A_2=2\pi\int_0^1 r\sqrt{16r^2+1}\,dr = 2\pi\left[\frac{1}{48}(16r^2+1)^{3/2}\right]_0^1=\frac{\pi}{24}(17\sqrt{17}-1).$$

2. $\begin{array}{l} v=\cos x-u'' \\ v'=-\mathrm{sen}\,x-u''' \end{array} \to u'''-u=-2\,\mathrm{sen}\,x$

Il polinomio caratteristico $P(\lambda)=\lambda^3-1$ ha come radici $1,\ -\frac12\pm i\frac{\sqrt3}{2}$. Una base dello spazio V_0 è dunque $e^x,\ e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt3}{2}x,\ e^{-x/2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt3}{2}x$.
Una soluzione particolare dell'eq. $z'''-z=-2e^{ix}$ è della forma $\bar z=Ae^{ix}$. Sostituendo, si trova che deve essere $A=\frac{2}{1+i}=1-i$. Dunque $\bar y=\mathrm{Im}\,\bar z=\mathrm{sen}\,x-\cos x$.
Trovate le soluzioni $u(x)$, le $v(x)$ si ricavano per sostituzione.

3.

Il dominio è connesso, ma non s. connesso, essendo costituito dallo spazio privato del cilindro con asse perpendicolare al piano xy e la cui sezione con tale piano è il cerchio di centro $(0,-1)$ e raggio 1.

Per stabilire se è conservativo, calcoliamo il lavoro del campo su una curva chiusa che ruota attorno al cilindro:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = -1 + 2\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Poiché $F(\varphi(t)) = (0, 0, \lg\sqrt{3})$, $\varphi'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\,\theta, 2\cos\theta, 0)$, $F\cdot\varphi' = 0$ e dunque il lavoro è nullo.

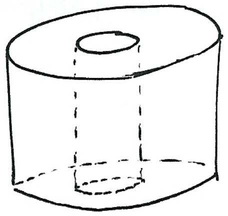
Per calcolare il potenziale:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{xz}{x^2+y^2+2y} \rightarrow U = \frac{z}{2}\lg(x^2+y^2+2y) + c(y,z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{z(y+1)}{x^2+y^2+2y} + \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{z(y+1)}{x^2+y^2+2y} \rightarrow c = c(z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2}\lg(x^2+y^2+2y) + c'(z) = \frac{1}{2}\lg(x^2+y^2+2y) \rightarrow c = \text{costante}.$$

In conclusione: $U = z\lg\sqrt{x^2+y^2+2y} + c$.



$$4 \le x^2 + (y+1)^2 \le 9$$
$$|z| \le 1$$

Il flusso richiesto coincide con l'integrale di div F nel dominio.
Poiché $\mathrm{div}\,F = -2z$, e il dominio è simmetrico rispetto al piano xy, l'integrale (e quindi il flusso) è nullo.

4. La serie è a segno definitivamente positivo.

Poiché $|a_{n+1}/a_n| = \frac{\lg(n+1+x)}{\lg(n+x)}\frac{n!}{(n+1)!} \rightarrow 0$, la serie converge $\forall x$ del dominio.

Poiché $\|f_n\|_{(-1,+\infty)} = +\infty$, la convergenza non è totale.

Invece, $\|f_n\|_{(-1,M)} = \frac{\lg(n+M)}{n!}$ è il termine generale di una serie convergente.

La serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+x)}$ converge $\forall x > -1$ (criterio rapporto).

Inoltre $\|f'_n\|_{(-1,+\infty)} = \frac{1}{n!(n-1)}$ che è il termine generale di una serie convergente.

In ogni intervallo $(-1, M]$ sono dunque verificate le ipotesi del teorema di derivata sotto segno di serie.

Indicato con $f(x)$ la somma della serie data, si ha:

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} - 2 = e - 2.$$

(Infatti, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = e$).