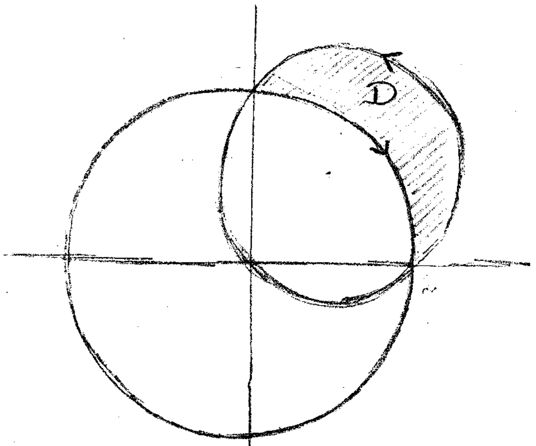
Soluzioni

1.



$$\text{area } D = \int_{\gamma^+} x\,dy = -\int_{\gamma^+} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\gamma^+} x\,dy - y\,dx$$

γ è formata da due archi di circonf.

$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'orientamento non è quello positivo

$\begin{cases} x = 1+\sqrt{2}\cos\theta \\ y = 1+\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$

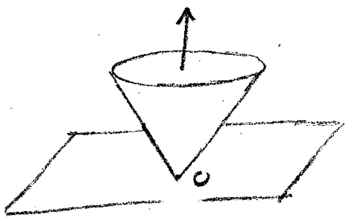
$$\text{area } D = -\int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\,(2\cos\theta)\,d\theta + \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (1+\sqrt{2}\cos\theta)(\sqrt{2}\cos\theta)\,d\theta =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} 4\cos^2\theta\,d\theta + \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\sqrt{2}\cos\theta + 2\cos^2\theta)\,d\theta =$$

$$= -4\left[\frac{\theta+\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{2}\left[\mathrm{sen}\,\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} + 2\left[\frac{\theta+\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = 2.$$

2.

- $\mathrm{div}\,F = 1$ $\quad\iiint_V dx\,dy\,dz = \frac{\pi}{3}$ volume cono di altezza 1 e raggio di base 1.



- Sup. laterale

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = r \end{cases}$ $\begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}$ $\quad \varphi_r \wedge \varphi_\theta = (-r\cos\theta, -r\,\mathrm{sen}\,\theta, r)$ orientato verso l'interno

$$F = -\int_0^1\int_0^{2\pi} (r^3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta, -r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta, r)\cdot(-r\cos\theta, -r\,\mathrm{sen}\,\theta, r)\,dr\,d\theta$$

$$= -\int_0^1\int_0^{2\pi} (-r^4\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + r^4\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\theta + r^2)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^1 r^4\,dr \int_0^{2\pi} \cancel{\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta} - \int_0^1 r^4\,dr \int_0^{2\pi} \cancel{\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\theta\,d\theta} - 2\pi\int_0^1 r^2\,dr$$

$$= -\frac{2}{3}\pi$$

- Base

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 1 \end{cases}$ $\begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{matrix}$ $\quad \varphi_r \wedge \varphi_\theta = (0,0,r)$ orientata verso esterno

$$F = \int_0^1\int_0^{2\pi} (r^3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta, -r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta, 1)\cdot(0,0,r)\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 r\,dr = \pi.$$

3. $I_x = \mathbb{R}$ $\quad I_y = [-1, 1]$

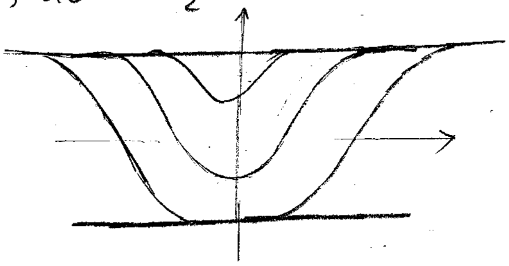
$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{-2xy}{\sqrt{1-y^2}}$ Il teorema di Cauchy non è valido se $\alpha = \pm 1$.

L'eq. ammette le soluzioni costanti $y(x) = \pm 1$.
Le altre soluzioni si trovano con il consueto metodo delle eq. a variabili separate:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int 2x\,dx \to \arcsin y = x^2 + c \to y = \operatorname{sen}(x^2+c)$$

Deve essere $-\frac{\pi}{2} < x^2 + c < \frac{\pi}{2} \to -\frac{\pi}{2} - c < x^2 < \frac{\pi}{2} - c$.
Perché abbia senso, occorre che sia $\frac{\pi}{2} - c > 0$, cioè $c < \frac{\pi}{2}$.

- $c \in (-\infty, -\frac{\pi}{2})$ $\quad \sqrt{-\frac{\pi}{2} - c} < |x| < \sqrt{\frac{\pi}{2} - c}$
- $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\quad |x| < \sqrt{\frac{\pi}{2} - c}$.



4. $\nabla f = (4y + 4kx, 4x - 6y)$

Se $k \neq -2/3$ l'unico punto stazionario è $(0,0)$
Se $k = -2/3$ sono stazionari tutti i punti della retta $y = \frac{2}{3}x$
In questo caso la fz. diventa $-(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \sqrt{3}y)^2$, che è negativa tranne che nella retta dei punti stazionari dove si annulla. Questi sono dunque pti di massimo.

$H = \begin{pmatrix} 4k & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

Perché $(0,0)$ sia di massimo imponiamo $\begin{cases} 4k < 0 \\ -24k - 16 > 0 \end{cases} \leftrightarrow k < -2/3$.
Se $k = 0$, la fz. diventa $4xy - 3y^2 = y(4x - 3y)$. Dallo studio del segno, si trova che $(0,0)$ è di sella.