7. Applicazioni della formula di Taylor

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $X_0 \in \Omega$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
(se Ω non è aperto, occorre che X_0 sia un punto interno)

Definizioni:

X_0 di massimo (minimo) assoluto per f
X_0 di massimo (minimo) relativo o locale per f
X_0 stazionario per f

| $f \in C^1(\Omega)$, X_0 di massimo o minimo $\Rightarrow$ grad $f(X_0) = 0$

Ci riconduciamo al caso di una variabile considerando le restrizioni a rette per X_0 parallele agli assi
Naturalmente non tutti i punti stazionari sono di massimo o minimo
esempio: $f(x,y) = xy$, $X_0 = (0,0)$.

X_0 di sella per f se è stazionario e se in ogni intorno di X_0 $f(X) - f(X_0)$ non ha segno costante

Esempio: $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$; $(0,0)$ è di minimo su ogni retta per l'origine, ma non è un pto di minimo.

Per determinare se un pto stazionario X_0 è di massimo o minimo locale, occorre studiare il segno di $f(X) - f(X_0)$ nell'intorno di X_0, ovvero il segno di $f(X_0+H) - f(X_0)$ al variare di H in un intorno di O.
Se $f \in C^2(\Omega)$, si ha

$$f(X_0+H) - f(X_0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} f(X_0)\, h_i h_j + o(\|H\|^2)$$

Indicando con $\mathcal{H}(X_0)$ la matrice hessiana di f in X_0, cioè

$$\mathcal{H}(X_0) = \{ D_{ij} f(X_0) \}_{i,j=1\dots n}$$

è anche

$$f(X_0+H) - f(X_0) = \frac{1}{2} \mathcal{H}(X_0) H \cdot H + o(\|H\|^2).$$

Il segno del primo membro è localmente individuato da quello della forma quadratica

$$Q(H) = \mathcal{H}(X_0) H \cdot H$$

| $f \in C^2(\Omega)$, X_0 stazionario
| $Q(H) > 0 \quad \forall H \in \mathbb{R}^n - 0 \Rightarrow X_0$ minimo relativo

La natura della forma quadratica è legata agli autovalori della matrice hessiana $\mathcal{H}(X_0)$.
Sappiamo che $\forall H \in \mathbb{R}^n - 0$, $Q(H)/\|H\|^2 = Q(H/\|H\|)$, cioè i valori che la fz. $Q(H)/\|H\|^2$ assume in $\mathbb{R}^n - 0$ sono gli stessi che $Q(H)$ assume sulla sfera $S = \{H : \|H\| = 1\}$
Dunque

$$m = \min_{\mathbb{R}^n - 0} \frac{Q(H)}{\|H\|^2}, \qquad M = \max_{\mathbb{R}^n - 0} \frac{Q(H)}{\|H\|^2}$$

Ma $\mathbb{R}^n - 0$ è aperto, dunque i pti in cui $Q(H)/\|H\|^2$ è minima o massima sono anche pti stazionari.
Poiché

$$\operatorname{grad} \frac{\mathcal{H}(X_0)H \cdot H}{\|H\|^2} = \frac{2(\mathcal{H}(X_0)H)\,\|H\|^2 - (\mathcal{H}(X_0)H \cdot H)\,2H}{\|H\|^4}$$

deve essere

$$\mathcal{H}(X_0)\,H = \frac{Q(H)}{\|H\|^2}\,H .$$

Questo significa che m, M sono autovalori di $\mathcal{H}(X_0)$ e i pti in cui questi valori sono assunti sono corrispondenti autovettori. (*)
Ma allora se tutti gli autovalori sono >0, anche $m>0$ e dunque la forma quadratica è d.p.; se tutti gli autovalori sono <0, anche $M<0$ e dunque la forma quadratica è d.n.; infine se gli autovalori non hanno tutti lo stesso segno, la forma quadratica è indefinita.

Riassumendo:

$\mathcal{H}(X_0)$ ha solo autovalori >0 $\Rightarrow$ X_0 di minimo
$\mathcal{H}(X_0)$ ha solo autovalori <0 $\Rightarrow$ X_0 di massimo
$\mathcal{H}(X_0)$ ha autovalori >0 e <0 $\Rightarrow$ X_0 di sella

X_0 di minimo $\Rightarrow$ $\mathcal{H}(X_0)$ ha solo autovalori ≥ 0
X_0 di massimo $\Rightarrow$ $\mathcal{H}(X_0)$ ha solo autovalori ≤ 0.

(*) Viceversa, gli autovalori di $\mathcal{H}(X_0)$ (che esistono e sono reali, dato che la matrice è reale e simmetrica) sono valori assunti dalla forma quadratica in S.
Infatti, sia $\mathcal{H}(X_0)\bar{H} = c\bar{H}$ per $\bar{H} \in \mathbb{R}^n - 0$.
Allora $\mathcal{H}(X_0)\bar{H} \cdot \bar{H} = c\|\bar{H}\|^2$, cioè $Q(\bar{H}/\|\bar{H}\|) = c$.

In conclusione, dunque, m e M sono il più piccolo e il più grande autovalore della matrice hessiana.

Un modo per ritrovare il risultato precedente consiste nel partire dal fatto che una matrice simmetrica si può ridurre a forma diagonale.
Sia

$$\mathcal{H}(X_0) = P D P^t \quad \text{ovvero} \quad D = P^t \mathcal{H}(X_0) P$$

(P è ortogonale , cioè $P^t = P^{-1}$)
Allora

$$\begin{aligned} Q(H) &= \mathcal{H}(X_0) H \cdot H = H^t \mathcal{H}(X_0) H \\ &= H^t P D P^t H = (P^t H)^t D (P^t H) = \\ &= K^t D K = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_i^2 \end{aligned}$$

Il segno della forma quadratica dipende da quello dei λ_i, che sono gli autovalori di D, ma anche quelli della matrice hessiana.

Diamo il seguente criterio per stabilire il segno degli autovalori di $\mathcal{H}(X_0)$ e quindi quello di $Q(H)$:

Sia Δ_K $K = 1, \dots, n$ il determinante del minore di ordine K formato dalle prime K righe e dalle prime K colonne di $\mathcal{H}(X_0)$.
Allora

$Q(H)$ d.p. $\iff$ $\Delta_K > 0$ per $K = 1, \dots, n$

$Q(H)$ d.n. $\iff$ $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ ....

Esempio: $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad Q(x, y) = a x^2 + 2 b x y + c y^2$$

$a > 0$, $\det A > 0$ $\Rightarrow$ Q d.p.

$a < 0$, $\det A > 0$ $\Rightarrow$ Q d.n.

Infatti

$$Q(x, y) = \frac{1}{a} \left\{ (a x + b y)^2 + (\det A) y^2 \right\}$$