# Equazioni differenziali

1. $y' - \frac{x}{x^2+1}\, y = 0$

2. $y' = \mathrm{tg}x \;\; y$

3. $y' + \frac{2}{x}\, y = \frac{\mathrm{sen}\,4\,x}{x^2}$

4. $y' = (\mathrm{tg}\, x)\, y + 1$ , $y(\pi) = 1$

5. $y'' + y = \mathrm{tg}\, x$

6. $y^{iv} - y = x$

7. $y'' - y = e^x$

8. $y'' + 4y = \cos x$ , $y(0) = 0$ , $y'(0) = 1$

9. $y'' - y = x\,\mathrm{sen}x$

10. $y'' + y = x\, e^x \cos 2x$

11. $y'' + y' + y = x + \mathrm{sen}x$

12. $u' = 5u + 4v$ , $v' = u + 2v$ , $u(0) = 0$ , $v(0) = 1$

13. $y' = \mathrm{tg}\, y$

14. $y' = 1 + y^2$ , $y(0) = 0$

15. $y' = \cos(y^2)$

16. $y' = x\sqrt{y-1}$, $y(0) = 1$ ; $y' = x\sqrt{y-1}$, $y(0) = 0$

17. $y' = \frac{y^2 - 1}{x\,y}$

18. $y' = y(y-1)$.

Svolgimento dell'esercizio n.18

E' un'equazione a variabili separate.

Il suo campo di esistenza è dato da $x , y \in R$ .

Le funzioni $y = 0$ , $y = 1$ sono soluzioni costanti.

Poiché la funzione $f ( x , y ) = y ( y - 1 )$ è continua il problema con condizione iniziale ammette almeno una soluzione locale.

Poiché $D_y f = 2y - 1$ esiste ed è localmente limitata, il problema ammette una sola soluzione locale. Dunque le varie traiettorie non si intersecano tra loro né con le soluzioni costanti.

Poiché $D_y f = 2y - 1$ non è globalmente limitata, l'intervallo in cui si risolve il problema in generale non sarà l'intera retta reale.

Nella striscia $0 < y < 1$ le soluzioni dell'equazione (decrescenti, perché $y' = y ( y - 1 ) < 0$) non possono fermarsi in un punto, né intersecare una soluzione costante. Quindi sono definite su tutto R ed hanno due asintoti orizzontali. Ad esempio , per $x \to + \infty$ sia $y \to L$. Allora $y' = y ( y - 1 ) \to L ( L - 1 )$. Ma se per $x \to + \infty$ $y \to L \in R$ ed $y' \to M \in R$ , allora $M = 0$. Nel caso dell'esempio dunque $L = 0$ oppure $L = 1$. Dovendo essere decrescente, per $x \to + \infty$ $y \to 0$ ( e naturalmente per $x \to - \infty$ $y \to 1$ ).

Separando le variabili e integrando, si ottiene successivamente:

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int dx$$

$$\log \left| \frac{y-1}{y} \right| = x + c$$

$$\left| \frac{y-1}{y} \right| = k e^x \quad \text{con } k > 0$$

**Caso #1 $\quad 0 < y < 1$**

$$\frac{1-y}{y} = k e^x$$

$$y(x) = \frac{1}{1 + k e^x}$$

Deve essere $0 < \dfrac{1}{1+k e^x} < 1$ , $1 + k e^x \neq 0$, Poiché k > 0, le condizioni sono sempre verificate e dunque le soluzioni esistono $\forall x \in R$ ( come avevamo stabilito a priori ).

**Caso #2  y > 1**

$$\frac{y-1}{y} = k e^x$$

$$y(x) = \frac{1}{1 - k e^x}$$

Deve essere $\frac{1}{1+k e^x} > 1$ , $1 + k e^x \neq 0$.

Svolgendo i calcoli, si trova che questo accade se 1 – k x > 0, cioè se x < log ( 1 / k ).

**Caso #3  y < 0**

$$\frac{y-1}{y} = k e^x$$

$$y(x) = \frac{1}{1 - k e^x}$$

Deve essere $\frac{1}{1+k e^x} < 0$ , $1 + k e^x \neq 0$,

Svolgendo i calcoli, si trova che questo accade se 1 – k x < 0, cioè se x > log ( 1 / k ).

Lo studente completi l’esercizio tracciando il grafico di qualcuna di queste soluzioni nei vari casi.