Matrice wronskiana

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad a_i \in C^0(I)$$

$y_1(x) \dots y_n(x)$ soluzioni

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad \text{matrice wronskiana}$$

Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(1) $y_1(x) \dots y_n(x)$ sono indipendenti

(2) $\exists x_0 \in I : \det W(x_0) \neq 0$

(3) $\forall x \in I, \det W(x) \neq 0$.

Infatti:
passiamo al sistema (omogeneo) associato $Y' + AY = 0$.
Siano $Y_1 \dots Y_n$ n soluzioni del sistema.
Facciamo vedere che

$Y_1(x) \dots Y_n(x)$ sono dipendenti (indipendenti)

$$\Updownarrow$$

$Y_1(x_0) \dots Y_n(x_0)$ sono dipendenti (indipendenti)

Proviamolo per la dipendenza.

$\Rightarrow$ ovvio

$\Leftarrow$ Sia $\sum c_i Y_i(x_0) = 0$ con i c_i non tutti nulli.
Vogliamo far vedere che $\sum c_i Y_i(x) = 0$.
Il vettore $\sum c_i Y_i(x)$ risolve il sistema (per la linearità) e si annulla per $x = x_0$. Lo stesso accade per la funzione (vettoriale) nulla. Data l'unicità di soluzione del problema di Cauchy, $\sum_i c_i Y_i(x) = 0$. ✓

Per provare la dipendenza o indipendenza dei vettori soluzione, scriviamo la matrice $n \times n$

$$(Y_1(x) \dots Y_n(x)).$$

Il suo determinante è sempre nullo (dipendenti) o sempre diverso da 0 (indipendenti).

Ma questa matrice è la wronskiana individuata dalle soluzioni $y_1(x) \cdots y_n(x)$ dell'equazione.
Infatti:

$$Y_i = (y_i, y_i', \dots, y_i^{(n-1)}).$$

Inoltre

$$Y_1 \cdots Y_n \ \underset{(\text{indip.})}{\overset{\text{dipend.}}{}} \iff y_1 \cdots y_n \ \underset{(\text{indip.})}{\overset{\text{dipend.}}{}}$$

Infatti

- $\sum_i c_i Y_i = 0$ con i c_i non tutti nulli

$$\Downarrow$$

$$\sum_i c_i y_i = 0$$

- $\sum_i c_i y_i = 0$ con i c_i non tutti nulli:

Derivando successivamente:

$$\sum_i c_i y_i' = 0$$
$$\sum_i c_i y_i'' = 0$$
$$\vdots$$
$$\sum_i c_i y_i^{(n-1)} = 0.$$

Dunque $\sum_i c_i Y_i = 0$.

✓