I domini normali ad un asse hanno frontiera di misura nulla

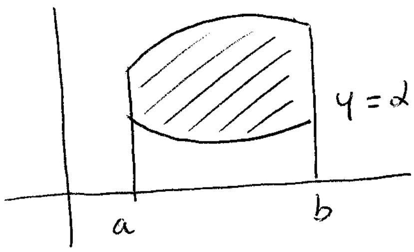
$A \subset \mathbb{R}^2$ si dice di misura nulla se

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists R_1 \dots R_n$ rettangoli con lati paralleli agli assi, t.c.

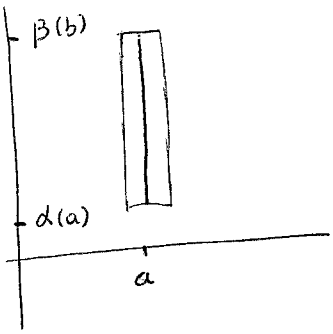
$$\bigcup_{i=1}^{n} R_i \supset A, \quad \sum_{i=1}^{n} \text{mis}\, R_i < \varepsilon.$$

$$A = \{(x,y) / \ x \in [a,b],\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

con $\alpha, \beta \in C^0[a,b]$, $\alpha < \beta$ (dominio normali all'asse x; in modo analogo quelli normali all'asse y).



La frontiera di A è formata dai due grafici e dai segmenti verticali; occorre far vedere che ciascuno di questi ha misura nulla.

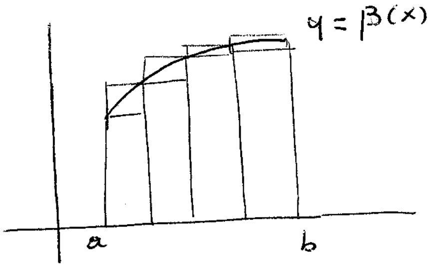


Il rettangolo $[a-\sigma, a+\sigma] \times [\alpha(a), \beta(a)]$ contiene il lato verticale e la sua area

$$2\sigma(\beta(a) - \alpha(a))$$

è minore di ε fissato, se scegliamo

$$\sigma < \frac{\varepsilon}{2(\beta(a) - \alpha(a))}$$



$\beta(x)$ è continua in $[a,b]$ (intervallo chiuso e limitato) e dunque uniformemente continua: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$: $|x' - x''| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ la costante di uniforme continuità corrispondente a $\varepsilon / b-a$: $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon / b-a$.

Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in sottointervalli $I_1 \dots I_n$ di ampiezza $\delta/2$; in ciascun intervallo siano x'_i, x''_i i punti di massimo e di minimo (rispettiv.) e poniamo $M_i = f(x'_i)$, $m_i = f(x''_i)$. Per quanto detto sopra, $M_i - m_i < \varepsilon / b-a$. I rettangoli $I_i \times [m_i, M_i]$ ricoprono il grafico di $\beta(x)$ e la somma delle loro aree $\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\ \text{mis}\, I_i$ è minore di $\frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \text{mis}\, I_i = \varepsilon$.