Funzioni implicite
Teorema del Dini – caso generale

Siano:

A un aperto di $\mathbb{R}^{n+p}$ (scriveremo i suoi elementi nella forma (X,Y) con $X \in \mathbb{R}^n$, $Y \in \mathbb{R}^p$).

$F : A \subset \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$ applicazione di classe $C^1(A)$

$P_0 = (X_0, Y_0) \in A$ tale che

$$F(P_0) = 0$$

$$\det \frac{\partial F}{\partial Y}(P_0) \underset{def.}{=} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(P_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial y_1}(P_0) & \cdots & \frac{\partial F_p}{\partial y_p}(P_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

Allora

$\exists\ I$ intorno di X_0
$\exists\ J$ intorno di Y_0
$\exists\ \varphi : I \to J$

t.c.

$$\varphi(X_0) = Y_0$$
$$F(X, \varphi(X)) = 0 \qquad \forall X \in I.$$

(la funzione φ esplicita le variabili Y rispetto alle X).

Inoltre $\varphi \in C^1(I)$ e risulta

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial X} = -\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_{\text{calcolate in } (X, \varphi(X))}$$

$$\frac{\partial(\varphi_1 \cdots \varphi_k)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}(x) = -\left(\frac{\partial(F_1 \cdots F_k)}{\partial(y_1 \cdots y_k)}\right)^{-1} \left(\frac{\partial(F_1 \cdots F_k)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}\right)(x, \varphi(x))$$

Esercizio

Trovare i punti di massimo o minimo locale delle funzioni $y = \varphi(x)$ definite implicitamente dall'equazione:

$$F(x,y) = x^3 - x^2 y + y^3 - 8 = 0.$$

Per trovare i punti stazionari (regolari) dobbiamo imporre le condizioni:

$$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ F'_x(x,y) = 0 \\ F'_y(x,y) \neq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x^3 - x^2 y + y^3 - 8 = 0 \\ 3x^2 - 2xy = 0 \\ -x^2 + 3y^2 \neq 0. \end{cases}$$

La seconda eq. fornisce $x = 0$ oppure $y = \frac{3}{2}x$.
Sostituendo nella prima, si deducono i punti

$$(0,2)\,, \quad \left(\frac{4}{\sqrt[3]{23}}\,, \frac{6}{\sqrt[3]{23}} \right).$$

Per scoprire se sono di massimo o minimo, studiamo il segno della derivata seconda, derivando IN FORMA IMPLICITA l'eq. di partenza (dove dunque y è funzione di x).

$$3x^2 - 2xy - x^2 y' + 3y^2 y' = 0$$

$$6x - 2y - 2xy' - 2xy' - x^2 y'' + 6yy'^2 + 3y^2 y'' = 0.$$

Tenendo conto che nei due punti trovati la derivata è nulla, si ottiene che in questi punti è

$$y'' = \frac{6x - 2y}{x^2 - 3y^2}.$$

Poiché $y''(0) > 0$, $y''(4/\sqrt[3]{23}) < 0$ il primo è punto di minimo, l'altro di massimo.

Invertibilità locale

Se A è un aperto di $\mathbb{R}$ e se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $C^1(A)$ tale che $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) \neq 0$ allora esiste un intorno di y_0 su cui è definita la funzione inversa f^{-1}. Inoltre f^{-1} è di classe C^1 e $f^{-1}(y)' = 1 / f'(x)$.

Questo risultato si può ottenere applicando il teorema del Dini alla funzione $F(x, y) = f(x) - y$.
Infatti $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$.
Esplicitare localmente x in funzione di y equivale ad invertire la funzione $f(x)$.
Inoltre, se è $x = \varphi(y)$, il teorema prova anche che $\varphi'(y) = -F'_y / F'_x$ $= 1 / f'_x(\varphi(y))$.

Il risultato si può estendere a funzioni $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, deducendolo dal teorema del Dini nella versione generale.

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe $C^1(A)$ e sia $X_0 \in A$ tale che

$$f(X_0) = Y_0 \qquad \det Jf(X_0) \neq 0.$$

Invertire la funzione $f(X)$ significa esplicitare X dall'equazione $f(X) = Y$, ovvero dall'equazione $f(X) - Y = 0$.
Questo si può fare applicando il teorema del Dini generale alla funzione $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da $F(X, Y) = f(X) - Y$, tenendo conto che $F(X_0, Y_0) = 0$, $\det \dfrac{\partial F}{\partial X}(X_0, Y_0) \neq 0$.

In generale, la condizione precedente assicura solo l'invertibilità locale, non quella globale.
Ad esempio:

$$f(x, y) = (e^x \cos y,\ e^x \operatorname{sen} y) \qquad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$$

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\det Jf = e^{2x} \neq 0$$

l'applicazione non è globalmente invertibile, perché periodica rispetto a y.