Moltiplicatori di Lagrange

1. Curve nel piano

A aperto di $\mathbb{R}^2$
$f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\gamma : \{ X \in A : g(X) = 0 \}$

Sia $P_0 \in \gamma$ un punto di massimo o minimo locale o assoluto per la funzione f sul vincolo γ, regolare.
Dunque, $g(P_0) = 0$, $\nabla g(P_0) \neq 0$ (ad es.: $\frac{\partial g}{\partial y}(P_0) \neq 0$).
Possiamo dunque parametrizzare γ in un intorno di P_0 nella forma

$$\begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases} \qquad t \in I_{t_0}$$

o anche

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = \varphi(x_0 + t) \end{cases} \qquad t \in I_0$$

In forma vettoriale possiamo scrivere

$$X = \Phi(t)$$

con $\Phi(0) = P_0$

e $g(\Phi(t)) = 0 \quad \forall t \in I_0. \qquad (*)$

Da $(*)$ segue che la derivata della funzione composta $g(\Phi(t))$ è identicamente nulla; in particolare lo è per $t = t_0$:

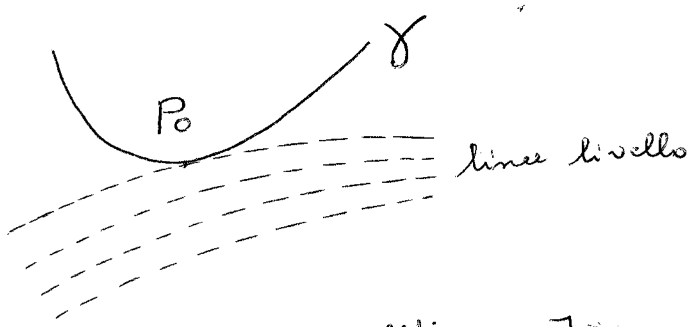
$$\nabla g(P_0) \cdot \Phi'(0) = 0.$$

I due vettori sono entrambi non nulli ($\nabla g(P_0)$ perché P_0 è un punto regolare, $\Phi'(0)$ perché una sua componente - nel caso preso in esame la prima - vale 1).
$\Phi'(0)$ dà la direzione della tangente a γ in P_0; dunque $\nabla g(P_0)$ è normale alla curva.
La funzione $f(\Phi(t))$ ha per $t = 0$ un punto di massimo o di minimo; dunque la sua derivata per $t = 0$ è nulla:

$$\nabla f(P_0) \cdot \Phi'(0) = 0.$$

Dunque anche $\nabla f(P_0)$ è diretto secondo la normale alla curva, e in quanto tale è parallelo a $\nabla g(P_0)$.

Dal punto di vista geometrico, la linea di livello di f passante per P_0 è tangente a γ:



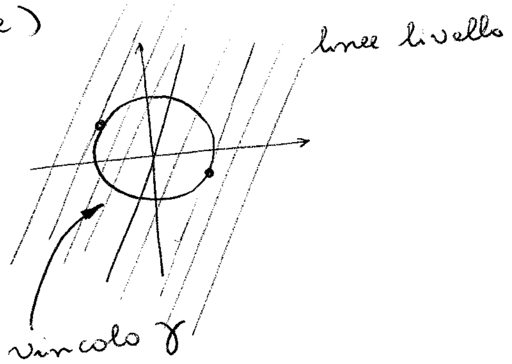
Dal punto di vista analitico, $\exists \lambda_0$: $\nabla f(P_0) = \lambda_0 \nabla g(P_0)$
o anche $\exists \lambda_0$: $\nabla f(P_0) + \lambda_0 \nabla g(P_0) = 0$.

<u>Teorema</u> moltiplicatori di Lagrange:

Nelle ipotesi precedenti, $\exists \lambda_0$: $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$.
(P_0, λ) è stazionario per
La funzione $\mathcal{L}$ si dice lagrangiana, λ_0 moltiplicatore di Lagrange.

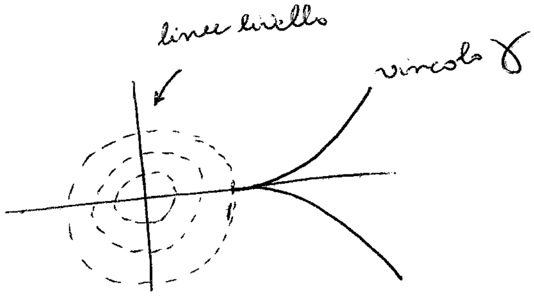
Esempio 1 (svolto a lezione)

$$f(x,y) = 2x - y$$
$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$



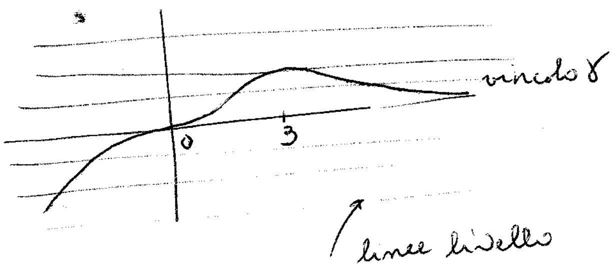
Esempio 2 (svolto a lezione)

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$
$$g(x,y) = (x-1)^3 - y^2$$



Esempio 3 (svolto a lezione)

$$f(x,y) = y$$
$$g(x,y) = y - x^3 e^{-x}$$



2\. Superfici nello spazio

A aperto di $\mathbb{R}^3$

f, g di classe $C^1(A)$

$Z: \{ X : g(X) = 0 \}$

Sia P_0 un punto di massimo o minimo locale o assoluto per f nel vincolo Z, regolare.

Dunque $g(P_0) = 0$, $\nabla g(P_0) \neq 0$ (ad es.: $\frac{\partial g}{\partial z}(P_0) \neq 0$).

Possiamo dunque esplicitare localmente una variabile in funzione delle altre due (nel caso considerato z in funzione di x ed y):

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \varphi(u, v) \end{cases} \quad \text{con } u \in I_{x_0} \quad v \in I_{y_0}$$

o anche

$$\begin{cases} x = x_0 + u \\ y = y_0 + v \\ z = \varphi(x_0 + u, y_0 + v) \end{cases} \quad \text{con } u, v \in I_0$$

In forma vettoriale:

$$X = \Phi(u, v)$$

con

$$\Phi(0, 0) = P_0$$

$$g(\Phi(u, v)) = 0 \quad \forall\, u, v \in I_0. \qquad (*)$$

Derivando in $(*)$ rispetto ad u e v:

$$\nabla g(P_0) \cdot \Phi_u(0,0) = 0$$

$$\nabla g(P_0) \cdot \Phi_v(0,0) = 0$$

I vettori Φ_u, Φ_v non sono paralleli: la matrice

$$J\Phi(P_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varphi'_u \\ 0 & 1 & \varphi'_v \end{pmatrix}$$

contiene un minore di ordine 2 invertibile.

Essi individuano il piano normale alla superficie Z.

Dunque $\nabla g(P_0)$ è normale a Z.

La funzione $f(\Phi(u,v))$ ha un punto di massimo o minimo per $u = v = 0$, dunque le sue derivate rispetto ad u e v sono nulle:

$$\nabla f(P_0) \cdot \Phi_u = 0$$

$$\nabla f(P_0) \cdot \Phi_v = 0$$

Dunque anche $\nabla f(P_0)$ è normale rispetto a Σ, perciò parallelo a $\nabla g(P_0)$:

$$\exists\, s_0 : \quad \nabla f(P_0) = s_0 \nabla g(P_0)$$

cioè

$$\exists\, \lambda_0 : \quad \nabla f(P_0) + \lambda_0 \nabla g(P_0).$$

In definitiva:

<u>Teorema</u> moltiplicatori di Lagrange

Nelle ipotesi precedenti:

$\exists\, \lambda_0$: $(x_0, y_0, z_0; \lambda_0)$ è stazionario per la funzione

$$\mathcal{L}(x,y,z;\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z).$$

<u>Esempio</u> (svolto a lezione)

$$f(x,y,z) = x + y$$
$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

3. Curve nello spazio

A aperto di $\mathbb{R}^3$

$f, g_1, g_2 : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\gamma : \{ X \in A : g_1(x) = g_2(x) = 0 \} = \{ x : G(x) = 0 \}$

Sia $P_0 \in \gamma$ un punto di massimo o minimo locale o assoluto per la funzione f nel vincolo γ, regolare. Dunque $G(P_0) = 0$, car $JG(P_0) = 2$; in particolare i due vettori $\nabla g_1(P_0), \nabla g_2(P_0)$ non sono paralleli.
Possiamo esplicitare localmente due variabili in funzione della ~~rimanente~~ e parametrizzare la curva rispetto a questa variabile assunta come parametro:

$$X = \varphi(t) \qquad t \in I_0$$

$$\varphi(0) = P_0$$

$$G(\varphi(t)) = 0 \qquad \forall t \in I_0.$$

Derivando:

$$JG(P_0)\varphi'(0) = 0$$

cioè

$$\nabla g_1(P_0) \cdot \varphi'(0) = \nabla g_2(P_0) \cdot \varphi'(0) = 0$$

$\varphi'(0)$ non è nullo (se abbiamo parametrizzato prendendolo come parametro z, si ha $\varphi(t) = (x(t), y(t), z_0 + t)$ e dunque almeno la terza componente ha derivata non nulla).
$\nabla g_1(P_0), \nabla g_2(P_0)$ non sono paralleli tra loro ed entrambi sono perpendicolari a $\varphi'(0)$. Poichè $\varphi'(0)$ indica la direzione della tangente a γ in P_0, $\nabla g_1(P_0)$ e $\nabla g_2(P_0)$ individuano il piano normale.
Restringiamo f alla curva: $F(t) = f(\varphi(t))$ deve avere per $t = 0$ un punto di massimo o minimo; dunque $F'(0) = 0$, cioè $\nabla f(P_0) \cdot \varphi'(0) = 0$. Dunque $\nabla f(P_0)$ deve stare nel piano normale e perciò deve essere

$$\nabla f(x_0) = s_1 \nabla g_1(P_0) + s_2 \nabla g_2(P_0).$$

Dunque:

Teorema moltiplicatori di Lagrange

Nelle ipotesi precedenti
$\exists\, \lambda_0, \mu_0$: (P_0, λ_0, μ_0) è stazionario per la funzione
$$\mathcal{L}(X, \lambda, \mu) = f(X) + \lambda\, g_1(X) + \mu\, g_2(X).$$

Esempio (svolto a lezione)
$$f(x,y,z) = z$$
$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$$
$$g_2(x,y,z) = x+z.$$

Come il teorema delle funzioni implicite, anche quello dei moltiplicatori di Lagrange si presta ad una versione generale.