Equazioni differenziali - cenni di teoria
complemento delle parti svolte a lezione

Riferimenti bibliografici
[1] Fusco-Marcellini-Sbordone : Elementi di A.M. 2 - Liguori ed.
[2] Barutello e altri : Analisi matematica, vol. 2 - Apogeo

1. Equazioni differenziali del I ordine in forma normale
cfr. [1] pagg. 117-122
[2] pagg. 397-400

$A \subset \mathbb{R}^2$ aperto
$f: A \to \mathbb{R}$

- $y' = f(x, y)$

Una soluzione di questa equazione è una funzione $y(x)$ definita e derivabile in un intervallo I tale che:

- $\forall x \in I, \quad (x, y(x)) \in A$
- $\forall x \in I, \quad y'(x) = f(x, y(x))$.

Dato $(x_0, y_0) \in A$, imponiamo alle soluzioni dell'eq. differenziale di soddisfare la condizione iniziale:

- $y(x_0) = y_0$.

In questo caso l'intervallo I deve avere x_0 come punto interno.

Esempi:

- $f(x, y) = -a(x)\,y + b(x)$ equazione lineare
- $f(x, y) = A(x)\,B(y)$ equazione a variabili separate

Problemi associati

existenza
- locale o in piccolo (slz. definite in un intorno di x_0) — vale per le equazioni a variabili separate
- globale o in grande (slz. definite in un intervallo assegnato) — vale per le eq. lineari

unicità $\begin{cases} \text{può mancare per le eq. a variabili separate} \\ \text{vale per le eq. lineari (sotto ipotesi di regolarità)} \end{cases}$

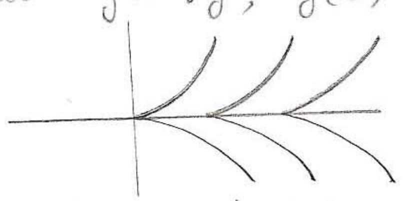
Teorema di esistenza locale (Peano)

> Se $f(x,y)$ è continua in A, il problema con condizione iniziale (o problema di Cauchy) ammette almeno una soluzione locale.

Esempi di applicabilità del teorema

- eq. lineari con $a(x), b(x) \in C^0(I)$
- eq. a variabili separate con $A(x) \in C^0(I_x)$, $B(y) \in C^0(I_y)$

Si può perdere l'unicità; ad esempio $y' = \sqrt[3]{y}$, $y(0) = 0$



L'aver scelto A aperto assicura che (x_0, y_0) è interno ad A e questo garantisce che le soluzioni sono definite in un intorno completo di x_0.
Se (x_0, y_0) sta sulla frontiera di A, questo risultato può mancare.
Ad es.: $y' = -1 - \sqrt{y}$, $y(0) = 0$. In questo caso non può esistere una soluzione definita in un intorno completo di $x_0 = 0$; infatti, risultando $y' < 0$, ogni possibile soluzione è decrescente e, poiché $y(0) = 0$, dovrebbe essere $y(x) < 0$ a destra di x_0; il che è impossibile, perché la soluzione uscirebbe dal campo di esistenza dell'eq. $(y \geq 0)$.

Teorema di esistenza e unicità locale (Cauchy)

> Se $f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C^0(R)$ – essendo $R = [x_0 - r_1, x_0 + r_1] \times [y_0 - r_2, y_0 + r_2]$ un rettangolo di centro $(x_0, y_0) \in A$ – il problema con condizione iniziale ammette una e una sola soluzione locale.

Esempi di applicabilità del teorema

- eq. lineari con $a(x), b(x) \in C^0(I_{x_0})$ – I intorno di x_0
- eq. a variabili separate con $A(x) \in C^0(I_{x_0})$, $B(y) \in C^1(I_{y_0})$

Osservazione

Il teorema classico di Cauchy vale in ipotesi più deboli:

$f(x,y)$ continua in R

$f(x,y)$ lipschitziana in y uniformemente rispetto ad x in R.

La seconda condizione significa:

$$\exists L>0: \ |f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|,$$
$$\forall x \in [x_0-\tau_1, x_0+\tau_1], \quad \forall y_1, y_2 \in [y_0-\tau_2, y_0+\tau_2]$$

L'ipotesi da noi scelta per il teorema di Cauchy è più forte; infatti, usando il teorema di Lagrange:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\bar{y})\right| |y_1-y_2| \le M|y_1-y_2|$$

avendo posto $M = \max_R \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$.

Esistono funzioni lipschitziane non di classe C^1; ad esempio $f(x,y) = |y|$.

Cenni di dimostrazione del teorema

i dettagli si trovano nel testo [2] oppure negli appunti messi in rete

(i) I problemi

$$\begin{cases} y \in C^1(I_{x_0}) \\ y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y \in C^0(I_{x_0}) \text{ con grafico } \subset R \\ y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt \end{cases}$$

sono equivalenti (forma differenziale e forma integrale).

(ii) Studiamo il problema nella forma integrale.
Siamo ricondotti a far vedere che l'applicazione:

$$y(x) \xrightarrow{T} y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$$

ha uno e un solo punto fisso.
Infatti, dire che $T(y)=y$ equivale a dire che $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt$.

(iii) Ricorriamo al teorema delle contrazioni

Poniamo $\mathcal{X} = \{ y(x) \in C^0(I_1) \ : \ \| y(x) - y_0 \| \leq r_2 \}$
dove $I_1 = [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$ e la norma è quella classica in C^0:

$$\| y(x) - y_0 \| = \max_{x \in I_1} | y(x) - y_0 | .$$

Rispetto a questa norma, $\mathcal{X}$ è completo (ogni successione di Cauchy è convergente).

- T manda $\mathcal{X}$ in se stesso

Se $y(x) \in C^0(I_1)$, anche $Ty(x)$ lo è.
Rimane da provare che se $\| y(x) - y_0 \| \leq r_2$, anche $\| Ty(x) - y_0 \| \leq r_2$.
Ma

$$| Ty(x) - y_0 | = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} | f(t, y(t)) |\, dt \right| \leq$$

$$\leq M r_1$$

dove $M = \max_R | f(x,y) |$.
Dunque occorre che sia $M r_1 \leq r_2$, cioè $r_1 \leq \frac{r_2}{M}$.

- T è una contrazione

$$| Ty_1(x) - Ty_2(x) | = \left| \int_{x_0}^{x} \left(f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \right) dt \right|$$

$$\leq L r_1 \| y_1 - y_2 \|$$

Dunque deve essere $L r_1 < 1$, cioè $r_1 < \frac{1}{L}$.

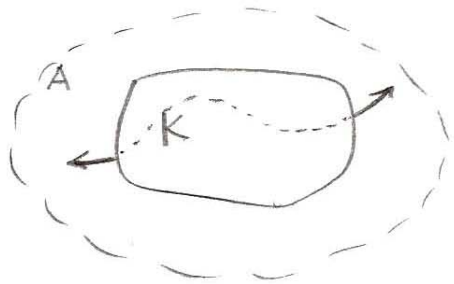
In definitiva, se r è un numero tale che

$$0 < r < \min \left\{ r_1, \frac{r_2}{M}, \frac{1}{L} \right\}$$

il teorema delle contrazioni permette di dedurre nell'intervallo $[x_0 - r, x_0 + r]$ l'esistenza e l'unicità di una e una sola soluzione del problema considerato. #

Intervallo massimale

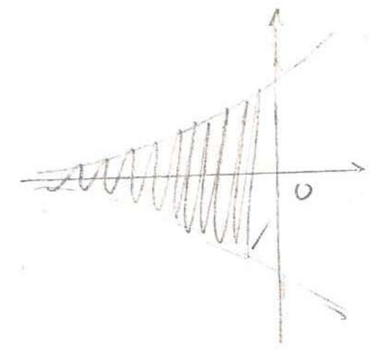
Indichiamo con $\bar{y}(x)$ la soluzione trovata in $[x_0 - \tau, x_0 + \tau]$.
Riprendiamo l'eq. diff. con la nuova C.I. $y(x_0+\tau) = \bar{y}(x_0+\tau)$.
Sotto le ipotesi del teorema di Cauchy si trova una nuova soluzione che (per l'unicità) a sinistra coincide con $\bar{y}$.
In questo modo si estende a destra l'intervallo di esistenza (la stessa cosa si fa a sinistra). A questo punto possiamo ripetere il procedimento, ottenendo una nuova estensione.
Non si può però pensare di ottenere un intervallo di ampiezza prestabilita.
Ad es.: $y' = y^2$, $y(0) = 1$.
La funzione $f(x,y) = y^2$ verifica le ipotesi del teorema in ogni rettangolo di centro $(0,1)$, ma la funzione $\frac{1}{1-x}$ non è soluzione $\forall x$, ma solo in $(-\infty, 1)$.
Il procedimento di estensione verso destra (o sinistra) si può ripetere ∞ volte, ogni volta guadagnando un incremento δ_n; può però accadere che $\sum_n \delta_n$ sia minore dell'ampiezza di un fissato intervallo.
L'intervallo massimale che si ottiene $I_{max} \equiv (x_m, x_M)$ è aperto (altrimenti potremmo ripetere il procedimento).
Se f verifica in A le ipotesi del teorema, si può provare che, preso comunque un compatto $K \subset A$, per $x \to x_m$ e per $x \to x_M$ la soluzione esce dal compatto, cioè si avvicina arbitrariamente alla frontiera (anche se non è detto che ci arrivi).



Possibili casi (per l'estensione a destra):

- $x_M < +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to x_M} y(x)$ non esiste

  es. per l'eq. $y' = y - \frac{e^x}{x^2} \cos\frac{1}{x}$, $x < 0$
  la fz $y = e^x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ è soluzione.

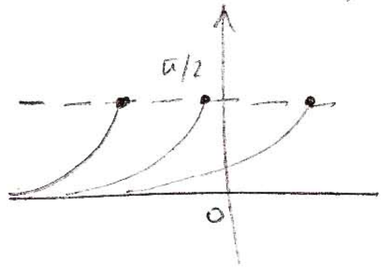


- $x_M < +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to x_M} y(x) = L \in \mathbb{R}$

Il punto (x_M, L) sta sulla frontiera di A ;
la slz. muore in questo punto.

$y' = \operatorname{tg} y \quad , \; y \in (0, \frac{\pi}{2})$

$y = \operatorname{arcsen}(Ke^x) \,, \quad x < -\log K$

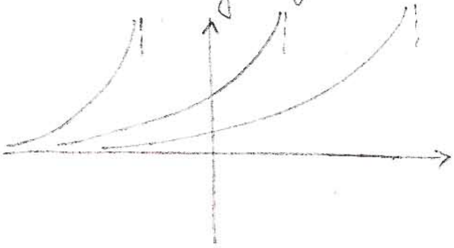


. $x_M < +\infty \,, \quad \lim_{x \to x_M} y(x) = \pm\infty$

La soluzione esplode in un tempo finito.

$y' = y^2 \quad , \quad y > 0$

$y = \frac{1}{c - x} \qquad x < c$

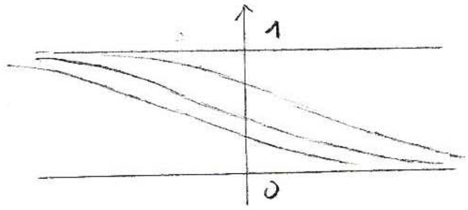


. $x_M = +\infty$

La soluzione è indefinitamente prolungabile nel futuro.

$y' = y(y-1) \qquad 0 < y < 1$

$y = \frac{1}{1 + c^2 e^x} \qquad x \in \mathbb{R}$



Esistenza e unicità globale

Cfr. [1] pagg. 126 - 131

Se

$$f(x,y) \in C^0([a,b] \times \mathbb{R})$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C^0([a,b] \times \mathbb{R})$$
$$\exists L > 0 : \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leq L \quad \forall x \in [a,b], \forall y \in \mathbb{R}$$

allora

$\forall x_0 \in [a,b], \forall y_0 \in \mathbb{R}$ esiste una ed una sola funzione $y \in C^1[a,b]$ che risolve in $[a,b]$ l'eq. diff. $y' = f(x,y)$ e verifica la C.I.

Osservazione
la condizione su $\frac{\partial f}{\partial y}$ deve essere verificata su tutta la striscia e non solo localmente.

<u>Esempi</u> di applicabilità del teorema

- equazioni lineari con $a(x)$, $b(x) \in C^0([a,b])$.

dimostrazione

Supponiamo $x_0 \in [a,b)$ e proviamo che la soluzione può essere estesa fino a b.
Si riprenda la dimostrazione del teorema di Cauchy.
Stavolta non dobbiamo imporre la condizione $\| Ty(x) - y_0 \| \leq r_2$ perché non ci sono restrizioni sulla y.
Quindi otteniamo una e una sola soluzione su un intervallo $[x_0, x_0 + r]$ con $r < \frac{1}{L}$, ad esempio $r = \frac{1}{2L}$.
Se $x_0 + \frac{1}{2L} \geq b$, abbiamo completato la dimostrazione; altrimenti ripetiamo il procedimento a partire da questo punto. Poiché ogni volta prolunghiamo l'intervallo di una stessa quantità, dopo un numero finito di passi si arriva all'estremo b.
Analoghe considerazioni per il prolungamento a sinistra.

#

2. Equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$y' + a(x)\,y = b(x) \qquad a, b \in C^0(I)$$

Abbiamo già visto che il relativo problema con C.I. ammette una e una sola soluzione $y(x) \in C^1(I)$.
Al variare della C.I. si trovano tutte le infinite soluzioni dell'eq.
A lezione è stato esposto il procedimento per dedurre l'insieme delle soluzioni (integrale generale; vedere [1] pagg. 100-104, [2] pagg 10-12), osservando che è della forma

$$y(x) = \bar{y}(x) + V_0 = \bar{y}(x) + c\, y_0(x)$$

essendo

$\bar{y}(x)$ una soluzione particolare

V_0 l'insieme delle soluzioni dell'eq. omogenea associata; questo è uno spazio vettoriale di dimensione 1, una cui base è data dalla soluzione non nulla $y_0(x)$.

Questi risultati si possono stabilire a priori (cioè a partire dall'eq. e non dalla sua formula risolutiva.

- Se $y(x)$, $\bar{y}(x)$ risolvono l'eq., $y(x) - \bar{y}(x)$ risolve l'omogenea

  Per ipotesi $y' + a y = b$, $\bar{y}' + a\bar{y} = b$.
  Sottraendo membro a membro: $(y - \bar{y})' + a(y - \bar{y}) = 0$

- V_0 è uno s.v.

  Occorre verificare che se y_{01}, y_{02} risolvono l'omogenea e se c è un numero, allora anche $y_{01} + y_{02}$ e $c\,y_{01}$ la risolvono. La verifica è lasciata al lettore.

- $\dim V_0 = 1$

  Fissato $x_0 \in I$, consideriamo il problema $y' + a y = 0$, $y(x_0) = 1$: sia $\bar{y}_0(x)$ la sua (unica soluzione).
  Osserviamo che $\forall x \in I \quad \bar{y}_0(x) \neq 0$
  Infatti se fosse $\bar{y}_0(\bar{x}) = 0$, il problema con C.I. $y(\bar{x}) = 0$ avrebbe due soluzioni: $\bar{y}_0(x)$ e la soluzione identicamente nulla, il che contraddirebbe il teorema di unicità.

  Sia $\hat{y}(x)$ una soluzione dell'omogenea; indichiamo con c il suo valore per $x = x_0$.
  Allora $\hat{y}(x) = c\,\bar{y}_0(x)$.
  Infatti le due funzioni verificano l'omogenea e assumono lo stesso valore per $x = x_0$: per il teorema di unicità devono coincidere $\forall x \in I$.

3. Sistemi differenziali del I ordine: il caso lineare
Brevi cenni di teoria.

Il sistema
$$\begin{cases} u' = xu + v + \cos x \\ v' = u - x^2 v + 1 \end{cases}$$
di due equazioni nelle incognite $u(x)$, $v(x)$ si può scrivere in forma vettoriale
$$Y' + A(x)Y = B(x)$$
ponendo
$$Y(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \qquad Y'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}$$
$$A(x) = \begin{pmatrix} -x & -1 \\ -1 & x^2 \end{pmatrix} \qquad B(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ 1 \end{pmatrix}$$
La C.I. naturale è
$$Y(x_0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$
corrispondente alle condizioni $u(x_0) = u_0$, $v(x_0) = v_0$.
Il sistema si dice lineare del I ordine in due equazioni e due incognite.
Il caso di n equazioni ed n incognite è un'ovvia generalizzazione.
Procedendo come per le equazioni, per questi sistemi si può provare:

- se le funzioni che compongono la matrice $A(x)$ dei coefficienti e il vettore $B(x)$ dei termini noti sono continue in un dato intervallo I, il problema con C.I. ammette una e una sola soluzione, definita in I
- l'insieme delle soluzioni ha la forma $Y(x) = \bar{Y}(x) + V_0$ dove $\bar{Y}$ è una soluzione particolare e V_0 è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo
- V_0 è uno spazio vettoriale
- $\dim V_0 = n$ (numero delle equazioni ovvero delle incognite).

Verifichiamo quest'ultimo risultato.
Per fissare le idee, supponiamo $n=2$.
Consideriamo i problemi

$$\begin{cases} Y' + AY = 0 \\ Y(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} , \qquad \begin{cases} Y' + AY = 0 \\ Y(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

e indichiamo con $\bar{Y}_{01}(x)$, $\bar{Y}_{02}(x)$ le relative soluzioni.
Vogliamo provare che queste formano una base di V_0.

(i) sono indipendenti

Infatti, se $c_1 Y_{01}(x) + c_2 Y_{02}(x) = 0 \quad \forall x \in I$,
in particolare è anche $c_1 Y_{01}(x_0) + c_2 Y_{02}(x_0) = 0$,
cioè $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e questo accade se e solo se $c_1 = c_2 = 0$

(ii) generano V_0

Infatti, sia $Y(x) \in V_0$.
Se $Y(x_0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, proviamo che $Y = c_1 Y_{01} + c_2 Y_{02}$.
Questo segue dal fatto che le due funzioni verificano il sistema omogeneo e coincidono per $x = x_0$; per il teorema di unicità coincidono $\forall x \in I$.

#

4. Equazioni differenziali lineari di ordine n

L'eq. differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

si può scrivere come un sistema lineare del primo ordine di due equazioni in due incognite.

Poniamo

$$y = u$$
$$y' = v$$

e riscriviamo

$$y' = v$$
$$v' + a(x)v + b(x)y = f(x)$$

nella forma

$$Y' = A(x)Y + F(x)$$

dove

$$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(x) & -a(x) \end{pmatrix} \qquad F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Se $y(x)$ risolve l'eq., il vettore $Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$ risolve il sistema.
Viceversa, se $Y(x) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ risolve il sistema, la prima componente $u(x)$ risolve l'eq.

La C.I. $Y(x_0) = Y_0$ fornisce le C.I. $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ per l'equazione.
In maniera analoga si trattano le eq. di ordine n, che si riconducono ad un sistema lineare di n equazioni in n incognite; le C.I. diventano $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $\dots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Tenendo conto dei risultati visti per i sistemi, si ottengono per le eq. i seguenti risultati:

- se i coefficienti dell'eq. e il termine noto sono funzioni continue in un intervallo I, il problema con C.I. ammette una e una sola soluzione definita in I.

- l'insieme delle soluzioni dell'eq. ha la forma $\bar{y} + V_0$, con le consuete notazioni
- V_0 è uno s.v.
- $\dim V_0 = n$

Verifichiamo quest'ultimo risultato.
Per fissare le idee, supponiamo $n = 2$.
Consideriamo il sistema di due eq. e due incognite associato all'eq. omogenea e indichiamo con Y_{01}, Y_{02} rispettivamente le soluzioni dei due problemi:

$$\begin{cases} Y' + A(x)Y = 0 \\ Y(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \begin{cases} Y' + A(x)Y = 0 \\ Y(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Abbiamo già visto che queste due soluzioni sono indipendenti e generano tutte le soluzioni del sistema.
Sia $y(x)$ una soluzione dell'eq. omogenea, con $y(x_0) = c_1$ e $y'(x_0) = c_2$.
Il vettore $Y(x) = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ risolve il sistema con la C.I.
$Y(x_0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.
Sappiamo che $Y(x) = c_1 Y_{01}(x) + c_2 Y_{02}(x)$; dunque
$y(x) = c_1 y_{01}(x) + c_2 y_{02}(x)$, dove y_{01} e y_{02} sono rispettivamente la prima componente di Y_{01} e Y_{02}.
Dunque ogni soluzione dell'eq. omogenea è combinazione lineare di y_{01}, y_{02}. (che sono anch'esse soluzioni dell'eq.).
Rimane da provare che y_{01}, y_{02} sono indipendenti.
Supponiamo sia

$$c_1 y_{01}(x) + c_2 y_{02}(x) = 0 \qquad \forall x \in I.$$

Derivando:

$$c_1 y_{01}'(x) + c_2 y_{02}'(x) = 0 \qquad \forall x \in I.$$

Dunque

$$c_1 Y_{01} + c_2 Y_{02} = 0$$

Poichè Y_{01}, Y_{02} sono indipendenti, deve essere $c_1 = c_2 = 0$

#