Note sul teorema del Dini

S. Spagnolo

1 Punti fissi

Data un'applicazione $\psi : C \to C$, ogni punto $z \in C$ per cui risulti $\psi(z) = z$ si chiama *punto fisso* della ψ.

Teorema 1 (delle contrazioni) *Sia C un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ e $\psi : C \to C$ una contrazione stretta, cioè esista una costante $L < 1$ per cui*

$$|\psi(x) - \psi(x')| \le L\,|x - x'| \qquad \forall\, x, x' \in C. \tag{1}$$

Allora la ψ ha uno ed un solo punto fisso $z \in C$.

Dim. Partendo da un arbitrario punto $x_0 \in C$, costruiamo per ricorrenza la successione $\{x_k\}$ delle *approssimanti sucessive*, ponendo

$$x_{k+1} \;=\; \psi(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Questa successione è di Cauchy. Infatti $x_{k+1} - x_k = \psi(x_k) - \psi(x_{k-1})$, quindi, grazie alla (1),

$$|x_{k+1} - x_k| \;\le\; L\,|x_k - x_{k-1}| \;\le\; L^2\,|x_{k-1} - x_{k-2}| \;\le\; \cdots \;\le\; L^k\,|x_1 - x_0|\,.$$

Ora $\sum_{k=0}^{\infty} L^k < +\infty$ per $L < 1$, quindi, per $m \ge n \ge \nu(\varepsilon)$, si ha

$$|x_m - x_n| \;\le\; \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k| \;\le\; \sum_{k=n}^{m-1} L^k\,|x_1 - x_0| \;\le\; \varepsilon$$

e , dato che l'insieme C è chiuso, per il criterio di Cauchy esiste $z \in C$ per cui

$$\{x_k\} \;\to\; z \qquad \text{per} \;\; k \to \infty.$$

Ma l'applicazione ψ è continua (anzi Lipschitziana) per l'ipotesi (1), quindi $\{\psi(x_k)\} \;\to \psi(z)$ e dall'eguaglianza $\psi(x_k) = x_{k+1}$, segue $\psi(z) = z$.

Per provare che il punto fisso é unico si noti che, se $\psi(z) = z$ e $\psi(z') = z'$,

$$|z - z'| \;=\; |\psi(z) - \psi(z')| \;\le\; L\,|z - z'| \;\le |z - z'|\,,$$

e quindi $z = z'$. $\square$

Il Teorema 1 ammette una generalizzazione assai naturale nell'ambiente degli spazi metrici:

Teorema 2 *Se* (C, d) *é uno spazio metrico completo e* $\psi : C \to C$ *verifica*

$$d\,(\psi(x), \psi(x')) \;\leq\; L\,d\,(x, x') \qquad (L < 1)\,, \quad \forall\, x, x' \in C\,,$$

la ψ *ha uno ed un solo punto fisso in* C.

Caso particolare: ψ *opera su uno spazio di Banach* X, *e*

$$\|\psi(x) - \psi(x')\| \;\leq\; L\,\|x - x'\| \qquad (L < 1)\,, \quad \forall\, x, x' \in X\,.$$

Dim. La dimostrazione é del tutto analoga a quella del Teor. 1, si tratta solo di sostituire, nei vari passaggi, $|x - x'|$ con $d\,(x, x')$. $\square$

Osservazione 1 Se ψ é una contrazione *non stretta*, cioé verifica la (1) con $L = 1$, non é detto che abbia punti fissi. Si pensi alle *traslazioni* su $\mathbb{R}^n$:

$$T_{x_0} :\; x \;\longmapsto\; x - x_0\,, \qquad (x,\; x_0 \in \mathbb{R}^n)\,,$$

o alle *rotazioni* su una corona circolare $C = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$

$$R_\theta \;:\; z \longmapsto z\,e^{i\theta_0}\,, \qquad (z \in \mathbb{C},\; \theta_0 \in \mathbb{R})\,.$$

Si noti che nel primo caso l'insieme C é convesso ma non compatto, mentre nel secondo caso é compatto ma non convesso.

2 Teorema di Lagrange per funzioni vettoriali

Per ogni funzione *scalare* differenziabile $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, vale la seguente versione del *Teorema del valor medio*:

Proposizione 1 *Siano* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ *due punti di di* Ω *tali che il segmento* $\sigma[x, x']$ *che li congiunge è contenuto in* Ω. *Allora è possibile trovare un terzo punto* $z \in \sigma[x, x']$ *in modo che valga l'eguaglianza*

$$\varphi(x) - \varphi(x') \;=\; (\nabla\varphi\,(z)\,,\, x - x') \;= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,(z)\,(x_j - x'_j)\,. \tag{2}$$

Dim. Basta applicare il teorema di Lagrange per funzioni di una variabile a

$$\Phi(t) \;=\; \varphi(tx' + (1-t)x)\,, \qquad 0 \le t \le 1\,.$$

Infatti $\Phi(t)$ è una funzine derivabile e

$$\Phi'(t) \;=\; (\nabla\varphi(tx' + (1-t)x)\,, x' - x)\,. \qquad \square$$

Purtroppo la (2) non si estende al caso di una funzione vettoriale

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^n\,,$$

se infatti poniamo

$$x \;=\; (x_1, \dots, x_n) \;\in\; \mathbb{R}^n, \qquad f(x) \;=\; (f^1(x), \dots, f^n(x)) \;\in\; \mathbb{R}^n,$$

applicando la Prop. 1 alle singole componenti scalari di f troviamo n diversi punti $z_{(1)}, \dots, z_{(n)}$ del segmento $\sigma[x, y]$ per i quali valgono le eguaglianze

$$f^i(x) - f^i(x') = (\nabla f^i\,(z_{(i)}),\, x - x') = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x_j}\,(z_{(i)})\,(x_j - x_j'), \quad 1 \le i \le n. \tag{3}$$

Osservazione 2 Si noti che $z_{(1)}, \dots, z_{(n)}$ non indicano le componenti di un vettore di $\mathbb{R}^n$, ma sono dei vettori di $\mathbb{R}^n$, come x e x'.

Le eguaglianze (3) possono scritte nella forma compatta

$$f(x) - f(x') = \widetilde{D}f(z_{(1)}, \ldots, z_{(n)})\,(x - x')\,, \tag{4}$$

dove

$$\widetilde{D}f\,(z_{(1)}, \ldots, z_{(k)}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1}(z_{(1)}) & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_n}(z_{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^k}{\partial x_1}(z_{(n)}) & \cdots & \dfrac{\partial f^k}{\partial x_n}(z_{(n)}) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

é una matrice simile alla matrice Jacobiana

$$Df\,(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix},$$

in cui peró le derivate della componente f^1, cioé quelle che compaiono nella prima riga, sono calcolate nel punto $z_{(1)}$, le derivate di f^2 sono calcolate in $z_{(2)}$, etc. Dunque $\widetilde{D}f$, che possiamo chiamare la matrice *pseudo-Jacobiana* della f, non dipende da un singolo vettore di $\mathbb{R}^n$ come Df , ma da una n-pla di vettori.

Possiamo poi definire lo *pseudo-Jacobiano* di f, cioé

$$\widetilde{J}_f(z_{(1)}, \ldots, z_{(k)}) = \det\,[\widetilde{D}f\,(z_{(1)}, \ldots, z_{(k)})]\,.$$

Si noti che

$$\widetilde{J}_f\ : \Omega \times \cdots \times \Omega \to \mathbb{R}\,,$$

e che $\Omega \times \cdots \times \Omega$ è un aperto di $(\mathbb{R}^n)^n \equiv \mathbb{R}^{n^2}$.

Lemma 1 *Se $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, i coefficienti della matrice $\widetilde{D}f(z_{(1)}, \ldots, z_{(k)})$ e il suo determinante $\widetilde{J}_f(z_{(1)}, \ldots, z_{(k)})$ sono funzioni continue su $\Omega \times \cdots \times \Omega$.*

Dim. Per ipotesi, le derivate prime della f sono funzini continue su Ω, quindi gli elementi della prima riga di (5) sono funzioni continue rispetto al loro (unico) argomento $z_{(1)} \in \Omega$, quelli della seconda riga sono funzioni continue rispetto a $z_{(2)} \in \Omega$, etc. Per quel che riguarda $\widetilde{J}_f$, ricordiamo che il determinante di una matrice $n \times n$ si ottiene sommando fra loro $n!$ termini, ciascuno dei quali è il prodotto di n elementi della matrice; quindi $\det(\widetilde{D}f)$ risulta (globalmente) continua rispetto a $(z_{(1)}, \ldots, z_{(k)})$. $\square$

Esercizio. Siano $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$ aperti di $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \to \mathbb{R}$ una funzione della forma

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) \,=\, \varphi_1(z_1) \cdot \varphi_2(z_2) \cdots \varphi_n(z_n)\,, \qquad z_i \in \Omega_i\,.$$

Provare che se le $\varphi_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ sono continue, anche φ è continua. $\square$

Nel seguito considereremo la palla *chiusa* di centro x_0 e raggio ρ

$$B_\rho(x_0) \,=\, \{x \in \mathbb{R}^n : |x_0 - x| \leq \rho\}.$$

Corollario 1 *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, sia $x_0 \in \Omega$.*
i) Se $Df(x_0)$ é la matrice nulla, cioé

$$\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x_0) \,=\, 0\,, \qquad \forall\, i, j = 1, \ldots, n\,,$$

si puó trovare qualche $\rho > 0$ per cui

$$\|\widetilde{D}f(z_{(1)},\, \ldots,\, z_{(n)})\| \leq \frac{1}{2}\,, \qquad \forall\; z_{(1)},\, \ldots,\, z_{(n)} \in B_\rho(x_0).$$

Di conseguenza, per la (4), si ha

$$|f(x) - f(x')| \,\leq\, \frac{1}{2}\,|x - x'|\,, \qquad \forall\, x, x' \in B_\rho(x_0)\,.$$

ii) Se la matrice $Df(x_0)$ é invertibile, cioé $J_f(x_0) \neq 0$, esiste $\rho > 0$ tale che

$$\widetilde{J}_f(z_{(1)},\, \ldots,\, z_{(n)}) \,\neq\, 0, \qquad \forall\, z_{(1)},\, \ldots,\, z_{(n)} \in\, B_\rho(x_0).$$

Dim. La prima parte del Lemma 1 assicura che, per ogni $\varepsilon > 0$, si puó trovare $\rho > 0$ in modo che i coefficienti della matrice $\widetilde{D}f(z_{(1)}, \ldots, z_{(n)})$, siano tutti minori di ε in valore assoluto, per $|z_{(1)}| \leq \rho, \ldots, |z_{(n)}| \leq \rho$. Ma allora si ha anche $\|\widetilde{D}f(z_{(1)},\, \ldots,\, z_{(n)})\| \leq C\varepsilon$ con qualche costante C (dipendente da n) e quindi, scegliendo $\varepsilon \leq 1/2C$, si ottiene la (i).

La (ii) segue dalla seconda parte del Lemma 1, tenendo conto del fatto che

$$\widetilde{J}_f(x_0, \ldots, x_0) \,=\, J_f(x_0) \,\neq\, 0\,. \qquad \square$$

3 Invertibilitá locale

Data un'applicazione $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, sia $x_0 \in \Omega$ e $y_0 = f(x_0)$.

Definizione. Diremo che f è *localmente invertibile* in x_0 se esistono due intorni V e W, di x_0 e y_0 rispettivamente, tali che $f : V \to W$ é bigettiva, cioé

i) $f|_V$ è iniettiva,

ii) $f(V) = W$.

[Non è detto che come V, W si possano prendere due intorrni *sferici*].

Teorema 3 (del Dini) *Ogni applicazione $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 che verifichi $J_f(x_0) \neq 0$ è localmente invertibile in x_0.*

Dim. i) Per provare l'iniettivitá in un intorno di x_0, ricorreremo alla (4). Per il Corollario 1 possiamo trovare una palla V di centro x_0 tale che

$$\det[\widetilde{D}f\,(z_{(1)}, \ldots, z_{(n)})] \neq 0\,, \quad \forall\, z_{(1)}, \ldots, z_{(n)} \in V,$$

ma allora la (4) assicura che f è iniettiva in V. Infatti, se $f(x) - f(x') = 0$ con $x, x' \in V$, essendo la matrice $\widetilde{D}f\,(z_{(1)}, \ldots, z_{(n)})$ invertibile per ogni $z_{(i)} \in V$, dovrá essere necessariamente $x - x' = 0$.

ii) Per provare la surgettività, conviene fare una *riduzione preliminare* che non lede alla generalitá della dimostrazione, supporre cioé che sia

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad Df(x_0) = I \qquad (I = \text{matrice identica } n \times n) \tag{6}$$

Per ridursi a questa situazione, basta modificare la $f(x)$ componendola in partenza con una traslazione sulle variabili x, poi , in arrivo, con una traslazione sulle y, e infine moltiplicare per la matrice costante $S = [Df(x_0)]^{-1}$. Si tratta in altre parole di sostituire la $f(x)$ con l'applicazione

$$f^\sharp(x) = S\,(y_0 - f(x_0 - x))\,, \qquad S = [Df(x_0)]^{-1}.$$

E' chiaro che $f^\sharp(0) = S\,(y_0 - f(x_0)) = 0$. Inoltre si ha

$$Df^\sharp(0)| = S\,(Df(x_0 - x))|_{x=0} = S\,Df(x_0) = I,$$

dal momento che se S è una matrice costante e quindi

$$D(Sf(x)) = S\,Df(x).$$

Dunque l'applicazione $f^\sharp(x)$ verifica la (6). Essa è inoltre di classe C^1 in quanto composizione della f con varie applicazioni lineari (che sono ovviamente di classe C^1).

Infine, se proveremo che $f^\sharp : V_0 \to W_0$ è una bigezione fra due intorni di 0, ne dedurremo subito che $f : V \to W$ è bigettiva fra gli intorni, di x_0 e di y_0,

$$V = x_0 - V_0\,, \qquad W = y_0 - T(W_0)\,.$$

Per il resto della dimostrazione, saremo dunque autorizzati a supporre che la f verifichi le condizioni (6). Il nostro scopo é trovare due palle B_ρ e B_δ di $\mathbb{R}^n$, con centro l'origine, in modo che l'equazione

$$f(x) \,=\, y\,, \qquad \text{con} \quad y \in B_\delta\,,$$

ammetta una soluzione $x \in B_\rho$. Ció puó essere espresso equivalentemente dicendo che l'applicazione

$$\psi_y : x \longmapsto y + (x - f(x))\,, \qquad \text{con} \quad y \in B_\delta\,, \tag{7}$$

ha un punto fisso in B_ρ. Infatti, $\psi_y(x) = x$ eqivale a $y - f(x) = 0$.

Il fatto importante é che, per ogni valore del parametro y, l' applicazione $x \mapsto \psi_y(x)$ ha per matrice Jacobiana in $x = 0$ la matrice nulla. Infatti, dato che $D(y + \varphi(x)) = D\varphi(x)$ e $Dx = I$, si ha , per la (6),

$$D\psi_y\,(0) \,=\, D\,[\,y{+}(x{-}f(x)]|_{x=0} \,=\, D\,(x{-}f(x))|_{x=0} \,=\, I{-}Df(0) \,=\, I{-}I \,=\, 0\,. \tag{8}$$

Per il Corollario 1, (i), esiste allora $\rho > 0$ per cui l'applicazione ψ_y, quale che sia y, é una *contrazione* sulla palla chiusa $B_\rho \equiv B_\rho(0)$, e precisamente

$$|\psi_y(x) - \psi_y(x')| \,\le\, \frac{1}{2}\,|x - x'|\,, \qquad \forall\, x, x' \in B_\rho\,.$$

Per poter applicare il Teorema del punto fisso, dobbiamo peró accertarci che ψ_y operi sulla palla chiusa B_ρ. A questo scopo dovremo scegliere $y \in B_\delta$ con δ opportunamente piccolo. Ora notiamo che, per $y = 0$, l'applicazione

$$\psi_0(x) \,\equiv\, x - f(x)$$

trasforma l'origine in sé. Di conseguenza, la (8) implica che $|\psi_0(x)| \le |x|/2$, quindi ψ_0 opera su B_ρ, anzi si ha $\psi_0(B_\rho) \subseteq B_{\rho/2}\,$.
Ma allora, grazie alla (7), avremo

$$|\psi_y(x)| \,\le\, |y| + |\psi_0(x)| \,\le\, \delta + \frac{|x|}{2}\,, \qquad \forall\, y \in B_\delta\,,$$

e quindi, scegliendo $\delta = \rho/2$,

$$|\psi_y(x)| \,\le\, \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} \,=\, \rho\,, \qquad \forall\, y \in B_{\rho/2},\ \forall\, x \in B_\rho\,.$$

In conclusione, abbiamo trovato $\rho > 0$ tale che

$$\psi_y : B_\rho \to B_\rho \quad \text{é una contrazione stretta} \quad \forall\, y \in B_{\rho/2}\,.$$

Possiamo a questo punto applicare il Teorema del punto fisso, e concludere che, per ogni $y \in B_{\rho/2}$, si puó trovare in B_ρ un punto fisso x per ψ_y, cioé una soluzione dell'equazione $f(x) = y$. In altre parole abbiamo provato che

$$f(B_\rho) \,\supseteq\, B_{\rho/2}\,.$$

Per avere $f(V) = W$, basta prendere $W = B_{\rho/2}$, $V = f^{-1}(W) \cap B_\rho$. $\square$

Lemma 2 *i) Per ogni matrice $n \times n$ invertibile, si ha la stima*

$$\|A^{-1}\| \leq C_n \frac{\|A\|^{n-1}}{\det A}, \tag{9}$$

dove C_n é una costante dipendente da n.

ii) Se $A(x)$ è una matrice dipendente con continuità da una variabile $x \in \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, nel cioé i coefficiente di $A(x)$ sono funzioni continue su Ω, e $A(x)$ é invertibile per ogni x, la matrice inversa $A^{-1}(x)$ è a sua volta continua su Ω.

Dim. i) Ricordiamo che se A^{co} è la *matrice dei co-fattori di A*, si ha

$$A^{-1} = \frac{A^{co}}{\det(A)}. \tag{10}$$

Dato che le varie norme matriciali sono confrontabili fra loro, con costanti dipendenti solo da n, si puó provare la (9) con qualunque norma di A e di A^{-1}. Qui noi scegliamo

$$\|T\| = \sup\Big\{|Tv| : v \in \mathbb{R}^n,\ |v| = 1\Big\},$$

quindi, se $T = [t_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$, avremo

$$\max_{i,j} |t_{ij}| \leq \|T\| \leq C_n \max_{i,j} |t_{ij}|. \tag{11}$$

Ora, gli elementi della matrice A^{co} sono, a meno del segno, i minori di ordine $n-1$ della matrice trasposta A^*, quindi, per la prima parte della (11) con $T = A$, essi sono in valore assoluto minori o uguali a $\|A\|^{n-1}$. Allora, applicando la seconda parte della (11) con $T = A^{co}$, troviamo la stima

$$\|A^{co}\| \leq C_n \|A\|^{n-1},$$

che, inserita nella (10), fornisce la tesi.

ii) Se i coefficienti $a_{ij}(x)$ della matrice $A(x)$ sono funzioni continue su Ω, anche i minori di $A(x)$ risultano tali, in quanto somme di prodotti di $a_{ij}(x)$. In particolare, la matrice dei cofattori $A^{co}(x)$ é conitnua in x. D'altra parte, $\det(A(x))$ é una funzione continua che per ipotesi non si annulla mai in Ω. Ma allora, dalla (10), si ricava la continuitá di $x \mapsto A^{-1}(x)$. $\square$

Teorema 4 (del diffeomorfismo locale) *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, un'applicazione di classe C^1, iniettiva e surgettiva fra due intorni V, W di x_0 e di $y_0 = f(x_0)$, e tale che $J_f(x_0) \neq 0$. Allora l'applicazione inversa $g = f^{-1} : W \to V$ é differenziabile in y_0, e si ha*

$$Dg(y_0) = (Df(x_0))^{-1}. \tag{12}$$

Inoltre, $g(y)$ risulta di classe C^1 in un intorno di y_0.

Dim. Dato che la funzione $\widetilde{J}_f((z_{(1)}, \ldots, z_{(n)})$ é continua in $\Omega \times \ldots \times \Omega$, ed è diversa da zero per $(z_{(1)}, \ldots, z_{(n)}) = (x_0, \ldots, x_0)$, possiamo trovare qualche $\rho > 0$ in modo tale che

$$|\widetilde{J}_f(z_{(1)}, \ldots, z_{(n)})| \geq c_0 > 0, \qquad \forall z_{(1)}, \ldots, z_{(n)} \in B_\rho(x_0),.$$

Di conseguenza, per questi $z_{(i)}$, la matrice $\widetilde{D}f\,(z_{(1)}, \ldots, z_{(n)})$ é invertibile. Inoltre, dato che gli elementi di $\widetilde{D}f$ sono continui rispetto a $(z_{(1)}, \ldots, z_{(n)})$, la norma $\|\widetilde{D}f\,((z_{(1)}, \ldots, z_{(n)})\|$ si mantiene limitata, quindi per il Lemma 2 avremo, per qualche costante M,

$$\|[\widetilde{D}f\,(z_{(1)}, \ldots, z_{(n)})]^{-1}\| \leq M, \qquad \forall z_{(i)} \in B_\rho(x_0).$$

Dall'eguaglianza (4), possiamo allora concludere che

$$|f(x) - f(x')| \geq M^{-1}\,|x - x'|, \qquad \forall x, x' \in B_\rho(x_0),$$

o, equivalentemente,

$$|g(y) - g(y')| \leq M\,|y - y'|, \qquad \forall y,\, y' \in f(B_\rho(x_0)). \tag{13}$$

Per provare che $g(y)$ è differenziabile in y_0 e vale la (12), proviamo che

$$\lim_{|k| \to 0} \frac{|g(y_0 + k) - g(y_0) - [Df(x_0)]^{-1}\,k|}{|k|} = 0. \tag{14}$$

Dato che f è biunivoca, e $g = f^{-1}$, possiamo scrivere. per $|k|$ piccolo,

$$y_0 + k = f(x_0 + h), \qquad \text{dove} \quad h \equiv h(k) = g(y_0 + k) - g(y_0), \tag{15}$$

da cui, ponendo per brevitá $Df(x_0) = A$, $[Df(x_0)]^{-1} = B$, segue

$$g(y_0 + k) - g(y_0) - [Df(x_0)]^{-1}\,k = h - Bk = B(Ah - k).$$

D'altra parte abbiamo, sempre per la (15),

$$Ah - k = -[f(x_0 + h) - y_0 - Ah],$$

quindi la (14) diventa

$$\lim_{|k| \to 0} \frac{|B(f(x_0 + h) - y_0 - Ah)|}{|h|} \cdot \frac{|h|}{|k|} = 0. \tag{16}$$

Ora, dalle (15) e (13), segue che $|h| \equiv |h(k)| \to 0$ per $|k| \to 0$, anzi $|h| \leq M|k|$ per $|k|$ piccolo. Inoltre, essendo $f(x)$ differenziabile in x_0, abbiamo

$$\frac{|B(f(x_0 + h) - y_0 - Ah)|}{|h|} \leq \|B\|\,\frac{|f(x_0 + h) - y_0 - Ah|}{|h|} \to 0, \quad \text{per} \quad |h| \to 0,$$

il che prova la (16).

Di fatto, sostituendo y_0 con un generico punto $y = f(x) \in W$ tale che $J_f(x) \neq 0$, abbiamo provato che $g(y)$ é differenziabile in un intorno di y_0. e

$$Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1}. \tag{17}$$

Il fatto poi che l'applicazione g sia di classe C^1, é un'immediata conseguenza di (17). Infatti la funzione matriciale $y \mapsto Df(g(y))$ é continua in quanto composizione della funzione matriciale $x \mapsto Df(x)$, che é continua per ipotesi, con la funzione vettoriale $x = g(y)$, che é continua per la (13). Quindi, grazie al Lemma 2, (ii), anche $y \mapsto Dg(y)$ risulterá continua. $\square$

Esempio 1 (*coordinate polari)*
L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cosí definita:

$$f : (\rho, \theta) \longmapsto (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \tag{18}$$

é di classe C^1 (anzi, di classe C^∞) e si ha

$$Df(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}, \quad J_f(\rho, \theta) = \rho.$$

Dunque, possiamo applicare il Teor del Dini in un qualunque punto del piano $\mathbb{R}^2_{\rho,\theta}$ tranne la retta $\{\rho = 0\}$. Per ogni $R > 0$, f induce un diffeomorfismo fra il rettangolo aperto $\{(\rho, \theta) : 0 < \rho < R, \, 0 < \theta < 2\pi\}$ e il cerchio "privato di un raggio" $\{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\} \setminus \{(x, y) : 0 \leq x < R, \, y = 0\}$

Esempio 2 (*esponenziale complessa)*
L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da:

$$f : (x, y) \longmapsto (e^x \cos y, \, e^x \sin y) \tag{19}$$

é di classe C^1 (anzi, é C^∞), e

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}, \quad J_f(x, y) = e^{2x}.$$

Stavolta possiamo applicare il Teor del Dini in un qualunque punto del piano, dunque f é localmente invertibile dappertutto. Tuttavia, essa non é *globalmente* iniettiva, in quanto é 2π-periodica in y, cioé $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$. Peraltro, f non é neanche globalmente surgettiva, si vede infatti facilmente che $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Rispetto alla variabile complessa $z = x + iy$, la $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ non é altro che la funzione esponenziale: $f(z) = e^z \equiv e^x(\cos y + i \sin y)$.