

**Equazioni differenziali alle derivate parziali**  
**2015/16**

*versione provvisoria - 27 gennaio 2017*

**Sergio Spagnolo**



# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami sull'integrazione</b>	<b>5</b>
1.1	Definizioni ed esempi . . . . .	5
1.1.1	Misura di Riemann . . . . .	5
1.1.2	Misura di Lebesgue . . . . .	6
1.1.3	Insieme di Cantor . . . . .	7
1.1.4	$\sigma$ -additività della misura . . . . .	8
1.1.5	Insieme di Vitali . . . . .	9
1.1.6	Funzioni misurabili . . . . .	10
1.1.7	Integrale delle funzioni misurabili . . . . .	12
1.2	Principali proprietà dell'integrale . . . . .	14
1.2.1	Assoluta continuità . . . . .	14
1.2.2	Convergenza dominata . . . . .	14
1.2.3	Teorema di Beppo Levi . . . . .	15
1.2.4	Integrali iterati . . . . .	16
1.3	Cambiamento di variabili . . . . .	19
1.4	Integrale delle funzioni complesse . . . . .	19
1.5	Misure astratte. Delta di Dirac. . . . .	19
1.6	Riepilogo . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Spazi <math>L^p</math>. Prodotto di convoluzione</b>	<b>25</b>
2.1	Spazi di Banach . . . . .	25
2.2	Spazi $L^p$ . . . . .	26
2.3	Convoluzione. Supporto di una funzione. . . . .	28
<b>3</b>	<b>Preliminari sulle EDP</b>	<b>33</b>
<b>4</b>	<b>Equazioni del I ordine</b>	<b>37</b>
4.1	Equazioni del trasporto in 2 variabili . . . . .	37
4.2	Curve caratteristiche . . . . .	38
4.3	Equazioni non omogenee . . . . .	39
4.4	Trasporto in $n + 1$ variabili . . . . .	40
4.5	Equazione di Cauchy - Riemann . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Equazioni del II ordine in due variabili</b>	<b>43</b>
5.1	Equazione della corda vibrante . . . . .	43
5.1.1	Velocità finita di propagazione . . . . .	44
5.1.2	Coefficienti variabili . . . . .	45
5.2	Equazione unidimensionale del calore . . . . .	46
5.3	Equazione di Laplace sul piano . . . . .	47
5.3.1	Funzioni armoniche e funzioni olomorfe . . . . .	47
5.3.2	Armoniche radiali . . . . .	48

5.3.3	Soluzione fondamentale in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Richiami di Analisi geometrica</b>	<b>51</b>
6.1	Curve nello spazio . . . . .	51
6.2	Superfici nello spazio . . . . .	52
6.3	Ipersuperfici . . . . .	53
6.4	Varietà $k$ -dimensionali di $\mathbb{R}^n$ . . . . .	55
6.5	Formula di Gauss-Green . . . . .	57
6.6	Formula della co-area . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Equazione di Laplace in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>59</b>
7.1	Soluzione fondamentale . . . . .	59
7.2	Proprietà delle funzioni armoniche . . . . .	63
<b>8</b>	<b>Equazione di Fourier</b>	<b>65</b>
8.1	Mollificatori . . . . .	65
8.2	Problema di Cauchy . . . . .	69
8.3	Raccordo col dato iniziale . . . . .	70
<b>9</b>	<b>Equazione delle onde</b>	<b>71</b>
9.1	Formula risolutiva in dimensione tre . . . . .	71
9.1.1	Principio di Huygens . . . . .	73
9.2	Stima dell'energia . . . . .	74
9.3	Formula di Kirchhoff in dimensione due . . . . .	75
9.4	Principio di Duhamel . . . . .	76
<b>10</b>	<b>Spazi di Sobolev</b>	<b>79</b>
10.1	Teorema di Riemann-Lebesgue . . . . .	79
10.2	Derivate deboli . . . . .	79
10.3	Spazi di Sobolev: definizione ed esempi . . . . .	81
10.4	Spazi di Sobolev in una variabile . . . . .	84
10.5	Teoremi di immersione di Sobolev . . . . .	86
10.6	Convoluzione e derivate deboli . . . . .	86
10.7	Gli spazi $H_0^k(\Omega)$ . . . . .	87
<b>11</b>	<b>Distribuzioni</b>	<b>89</b>
11.1	Duale di uno spazio di Banach . . . . .	89
11.2	Definizioni . . . . .	91
11.3	Esempi di distribuzioni . . . . .	93
11.4	Spazi normali di distribuzioni . . . . .	94
11.5	Lo spazio $H^{-1}(\Omega)$ . . . . .	96
<b>12</b>	<b>Trasformata di Fourier</b>	<b>99</b>
12.1	Richiami sulle Serie di Fourier . . . . .	99
12.2	Trasformata su $L^1$ . . . . .	100
12.2.1	Principali proprietà . . . . .	102
12.2.2	Esempi . . . . .	103
12.3	Trasformata su $\mathcal{S}$ . . . . .	104
12.4	Trasformata su $L^2$ . . . . .	105
12.5	Trasformata su $\mathcal{S}'$ . . . . .	106
12.6	Teorema di Paley-Wiener . . . . .	108
12.7	Applicazioni alle equazioni differenziali . . . . .	109
12.7.1	Equazioni ordinarie . . . . .	109

12.7.2	Equazione di Laplace . . . . .	109
12.7.3	Trasformata di Fourier di una funzione radiale . . . . .	110
12.7.4	Equazione del calore . . . . .	111
12.7.5	Equazione delle onde . . . . .	111
<b>13</b>	<b>Problemi ben posti secondo Hadamard</b>	<b>115</b>
13.1	Il caso modello . . . . .	115
13.2	Equazioni a coefficienti costanti . . . . .	116
13.3	Sistemi a coefficienti costanti: necessità . . . . .	118
13.4	Sistemi a coefficienti costanti: sufficienza . . . . .	118
13.5	Sistemi iperbolici a coefficienti variabili . . . . .	120
13.6	Sistemi simmetrici . . . . .	120
13.7	Sistemi strettamente iperbolici . . . . .	122
13.7.1	Simmetrizzatore di una matrice . . . . .	123
13.7.2	Stima dell'energia per coefficienti indipendenti da $x$ . . . . .	124
13.7.3	Stima dell'energia in una variabile spaziale. . . . .	125
13.7.4	Richiami sugli operatori pseudo-differenziali . . . . .	126
13.7.5	Il simmetrizzatore pseudo-differenziale . . . . .	130



# Capitolo 1

## Richiami sull'integrazione

### 1.1 Definizioni ed esempi

#### 1.1.1 Misura di Riemann

Nella retta reale  $\mathbb{R}$  vi sono quattro tipi di *intervalli* limitati, cioè

$$[a, b], ]a, b[, [a, b[, ]a, b[, \quad \text{con } a < b,$$

di cui i primi due sono (rispettivamente) gli intervalli chiusi e quelli aperti. Nel piano reale  $\mathbb{R}^2$  i *plurirettangoli* sono l'unione di un numero finito di rettangoli chiusi coi lati paralleli agli assi.

Passando allo spazio di dimensione  $n$ , gli *intervalli* di  $\mathbb{R}^n$  sono gli insiemi del tipo  $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$  e i *plurintervalli*  $D$  sono l'unione di un numero finito di intervalli, cioè  $D = I_1 \cup \cdots \cup I_N$ . La *misura elementare* di  $D$  è definita in modo ovvio e viene indicata con  $|D|$ .

Un ins. limitato  $S \subset \mathbb{R}^n$  si dice *misurabile secondo Riemann* (o *R-misurabile*) se per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono due plurintervalli  $D, D'$  tali che

$$D \subseteq S \subseteq D', \quad |D'| - |D| \leq \varepsilon.$$

In altre parole, se definiamo la *misura interna* e la *misura esterna* (secondo Riemann) di un insieme limitato  $S \subset \mathbb{R}^n$  come l'estremo superiore delle misure dei plurintervalli contenuti in  $S$  e, rispettivamente, l'estremo inferiore delle misure dei plurintervalli contenenti  $S$ , l'insieme  $S$  risulta *R-misurabile* se la sua misura interna coincide con quella esterna. Resta in tal modo definita la *misura* di  $S$  (secondo Riemann).

Data una successione  $\{S_k\}$  di insiemi *R-misurabili*, non è detto che l'unione  $S = \bigcup_k S_k$  risulti a sua volta *R-misurabile*, come mostra il semplice esempio dall'insieme dei *numeri razionali* dell'intervallo reale  $[0, 1]$

$$S = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \equiv \{q_1, q_2, q_3, \dots\}.$$

Infatti gli insiemi unipuntuali  $S_k = \{q_k\}$  sono ovviamente *R-misurabili* con misura nulla, mentre la loro unione  $S$  ha misura interna 0, poiché non contiene alcun intervallo aperto, e misura esterna 1 poiché, per la densità dei razionali, ogni plurintervallo aperto che contiene  $S$  contiene necessariamente tutto  $[0, 1]$ .

Modificando un po' l'esempio precedente, possiamo costruire una successione  $\{D_k\}$  di plurintervalli aperti di  $\mathbb{R}$  la cui unione  $\Omega = \bigcup_k D_k$  è un insieme aperto non *R-misurabile*:

**Esempio 1. [razionali gonfiati]** Se  $\{q_k\}$  è l'ins. dei numeri razionali dell'intervallo  $[0, 1]$  e  $\delta > 0$ , l'ins.

$$\Omega(\delta) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k(\delta), \quad \text{dove } I_k(\delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - q_k| < \delta 2^{-k}\},$$

è un aperto che non è *R-misurabile* non appena si scelga  $\delta < 1/2$ .

**Dim.** Per ogni  $N$ , i plurintervalli aperti  $D_N(\delta) \equiv I_1(\delta) \cup \dots \cup I_N(\delta)$  verificano

$$|D_N(\delta)| \leq |I_1(\delta)| + \dots + |I_N(\delta)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2\delta \cdot 2^{-k} = 2\delta, \quad \bigcup_{N=1}^{\infty} D_N(\delta) = \Omega(\delta).$$

Calcoliamo ora la misura interna e quella esterna (secondo Riemann) di  $\Omega(\delta)$ . Se  $D$  è un plurintervallo chiuso contenuto nell'aperto  $\Omega(\delta)$ , per una nota proprietà degli insiemi compatti<sup>1</sup>  $D$  è contenuto in qualcuno degli aperti  $D_N(\delta)$  che invadono  $\Omega(\delta)$  e quindi  $|D| \leq 2\delta$ ; ma allora  $\Omega(\delta)$  ha misura interna  $\leq 2\delta$ . D'altra parte, se  $D'$  è un plurintervallo contenente  $\Omega(\delta)$ , per la densità dei razionali in  $[0, 1]$  si ha necessariamente  $D' \supseteq [0, 1]$ , quindi  $\Omega(\delta)$  ha misura esterna  $> 1$ . In conclusione, se  $2\delta < 1$  l'insieme  $\Omega(\delta)$  non può essere  $R$ -misurabile.  $\square$

Notiamo che, se l'unione di una successione di ins. misurabili fosse sempre misurabile, potremmo concludere che ogni aperto è misurabile. Vale infatti la

**Proposizione 1.** Per ogni aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  si può trovare una successione  $\{I_k\}$  di intervalli aperti tale che

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{I_k}.$$

Dato che  $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$  con  $D_k = I_1 \cup \dots \cup I_k$ ,<sup>2</sup> possiamo anche dire che  $\Omega$  è l'unione di una successione crescente di plurintervalli.

**Dim.** Ogni aperto è unione di una successione di aperti limitati, quindi non è restrittivo supporre in partenza che  $\Omega$  sia limitato. In tal caso vediamo che, per ogni  $\delta > 0$  l'insieme

$$K_\delta = \left\{ x \in \Omega \mid \text{dist}(x, C) \geq \delta \right\} \quad \text{dove } C = \mathbb{R}^n \setminus \Omega,$$

è chiuso e limitato cioè compatto.<sup>3</sup> Dal ricoprimento  $\{I_{\delta/2}(x) : x \in K_\delta\}$  di  $K_\delta$ , dove  $I_{\delta/2}(x)$  è l'intervallo aperto di centro  $x$  e raggio  $\delta/2$ , possiamo allora estrarre un sottoricoprimento finito  $\{I_{\delta/2}(x_1), \dots, I_{\delta/2}(x_N)\}$ :

$$K_\delta \subset I_{\delta/2}(x_1) \cup \dots \cup I_{\delta/2}(x_N) \subset \Omega$$

e, scegliendo successivamente  $\delta = 1, \delta = 1/2, \dots, \delta = 1/k, \dots$  conseguiamo la tesi.  $\square$

### 1.1.2 Misura di Lebesgue

La misura di Lebesgue è un'estensione della misura di Riemann in cui l'unione numerabile di ins. misurabili è sempre misurabile. Per Lebesgue, gli aperti  $\Omega$  e i compatti  $K$  di  $\mathbb{R}^n$  sono tutti misurabili con misure che sono, rispettivamente, la misura interna e quella esterna secondo Riemann:

$$m(\Omega) := \sup_{D \subseteq \Omega} |D|, \quad m(K) := \inf_{D \supseteq K} |D| \quad (D \text{ plurintervalli di } \mathbb{R}^n).$$

Si pone poi  $m(\emptyset) = 0$ .

<sup>1</sup> I compatti  $K \subset \mathbb{R}^n$  sono gli ins. chiusi e limitati. Se  $K$  è contenuto nell'unione di una famiglia infinita (anche non numerabile) di aperti  $\{\Omega_\alpha\}$  è sempre possibile trovare un numero finito  $\Omega_{\alpha_1}, \dots, \Omega_{\alpha_N}$  di tali aperti la cui unione contiene  $K$ .

<sup>2</sup> Nel caso *unidimensionale*, ogni aperto limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}$  è l'unione di una successione di intervalli aperti *a due a due disgiunti*: le componenti connesse di  $\Omega$ .

<sup>3</sup> Si vede facilmente che, per ogni  $S \subset \mathbb{R}^n$ , la funzione  $x \mapsto \text{dist}(x, S) \equiv \inf \{|x - y| : y \in S\}$  è continua su  $\mathbb{R}^n$ , quindi i  $K_\delta$  sono insiemi chiusi di  $\mathbb{R}^n$ .

### Definizione 1. [misura di Lebesgue]

Un ins. limitato  $S \subset \mathbb{R}^n$  è *misurabile* secondo Lebesgue <sup>4</sup> se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esistono un aperto  $\Omega$  ed un compatto  $K$  di  $\mathbb{R}^n$  con

$$K \subseteq S \subseteq \Omega, \quad m(\Omega) - m(K) \leq \varepsilon;$$

in tal caso la misura di  $S$  si definisce ponendo <sup>5</sup>

$$m(S) = \sup_{K \subseteq S} m(K) \equiv \inf_{\Omega \supseteq S} m(\Omega).$$

Un arbitrario  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  è misurabile se, per ogni  $r > 0$ , le intersezioni  $S \cap B_r$  <sup>6</sup> sono misurabili. Si definisce

$$m(S) := \sup_{r>0} m(S \cap B_r) \equiv \lim_{r \rightarrow +\infty} m(S \cap B_r).$$

### 1.1.3 Insieme di Cantor

Se nella definizione precedente prendiamo  $K = \emptyset$ , vediamo che

$$m(S) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ esiste un aperto } \Omega \supseteq S \text{ con misura } m(\Omega) < \varepsilon.$$

Di conseguenza, ogni sottoinsieme di un ins. misurabile di misura nulla è misurabile (e ha misura nulla).

**Osservazione 1.** Ogni ins. *chiuso*  $S$  di misura nulla secondo Lebesgue è  $R$ -misurabile. Infatti, supponendo per semplicità che  $S$  sia limitato e quindi compatto, per ogni  $\varepsilon > 0$  possiamo trovare un aperto  $\Omega \supset S$  di misura  $< \varepsilon$ , e (col solito argomento di compattezza) possiamo ricoprire  $S$  con un numero finito di intervalli  $I(x_1), \dots, I(x_N)$  contenuti in  $\Omega$ . Ma allora il plurintervallo  $D = I(x_1) \cup \dots \cup I(x_N)$  contiene  $S$  ed è contenuto in  $\Omega$ , cosicchè  $|D| \leq \varepsilon$ ; di conseguenza  $S$  ha misura esterna nulla secondo Riemann e quindi è  $R$ -misurabile.

E' naturale studiare le relazioni fra i seguenti tipi di *magrezza* per un dato ins. misurabile  $S \subset \mathbb{R}^n$ :

- (a)  $S$  è numerabile (cioè ha cardinalità  $\aleph_0$ ),
- (b)  $S$  ha misura nulla,
- (c)  $S$  non ha punti interni (cioè non contiene alcuna palla).

Anzitutto, com'è facile verificare, valgono le implicazioni

$$(a) \implies (b) \implies (c).$$

Le implicazioni inverse sono entrambe false. Infatti l'ins.  $\Omega(\delta)$  dell'Esempio 1 è un aperto di misura  $\leq 2\delta$ , quindi, per  $\delta < 1/2$ , il suo complementare  $[0, 1] \setminus \Omega_\delta$  è un chiuso privo di punti interni di misura  $> 0$ , dunque  $(c) \not\Rightarrow (b)$ . Il seguente esempio mostra che  $(b) \not\Rightarrow (a)$ :

**Esempio 2. [Cantor]** *Esiste un insieme chiuso e misurabile  $C \subset [0, 1]$  tale che:*

$$m(C) = 0, \quad \text{card}(C) = \mathbf{c}$$

dove  $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$  è la *cardinalità del continuo* <sup>7</sup>

<sup>4</sup> D'ora in poi parlando di *insiemi misurabili* intenderemo *misurabili secondo Lebesgue*.

<sup>5</sup> Quando vorremo evidenziare il fatto che  $S$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  useremo la notazione più precisa  $m_n(S)$ .

<sup>6</sup>  $B_r$  indica la palla chiusa di  $\mathbb{R}^n$  di centro nell'origine e raggio  $r$ .

<sup>7</sup> di conseguenza la famiglia dei sottoinsiemi di  $C$  ha cardinalità  $2^{\mathbf{c}}$ ; dato che ciascuno di tali sottoinsi. è misurabile, possiamo allora concludere che la famiglia degli ins. misurabili di  $\mathbb{R}$  ha cardinalità  $2^{\mathbf{c}}$ . La famiglia degli aperti ha invece cardinalità  $\mathbf{c}$ .

**Dim.** Consideriamo la successione decrescente di plurintervalli chiusi:

$$\begin{aligned} C_0 &= [0, 1] \\ C_1 &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \\ C_2 &= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1], \\ &\dots \end{aligned}$$

dove  $C_{n+1}$  si ottiene dividendo ciascuno degli intervalli di cui si compone  $C_n$  in tre intervalli uguali e cancellando l'intervallo di mezzo. Dunque  $C_n$  è formato da  $2^n$  intervalli disgiunti di lunghezza  $3^{-n}$  e quindi ha misura  $|C_n| = (2/3)^n$  e l'insieme di Cantor è così definito:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

E' chiaro che  $C$  è Riemann-misurabile con misura nulla. Più delicato è il calcolo della cardinalità di  $C$ . Per questo scopo conviene rappresentare i numeri  $x \in [0, 1]$  in base 3 (anzichè 10), scrivendo

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}, \quad x_k \in \{0, 1, 2\}, \quad x_k \neq 0 \text{ per infiniti valori di } k.$$

In tale rappresentazione i punti  $x$  dell'ins.  $C$  sono quelli che si possono scrivere usando solo le cifre 0 oppure 2, cioè tali che  $x_k \neq 1$  per ogni  $k$ . Si può allora definire un'applicazione  $\psi : C \rightarrow [0, 1]$  ponendo

$$\psi : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k/2}{2^k}.$$

Usando la rappresentazione binaria per descrivere i punti di  $[0, 1]$  vediamo subito che  $\psi$  è una *bigezione*.  $\square$

### Definizione 2. [quasi-ovunque]

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Nella teoria di Lebesgue, una proposizione  $P(x)$  dipendente da una variabile  $x \in S$  si dice *quasi-ovunque* (q.o.) *vera* se vale per ogni  $x$  tranne al più un insieme di misura nulla. Un ruolo importante è svolto dalla seguente *relazione di equivalenza* fra funzioni definite su  $S$ :

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ q.o. su } S. \quad (1.1)$$

## 1.1.4 $\sigma$ -additività della misura

### Definizione 3. [ $\sigma$ -algebra]

Una famiglia  $\mathcal{F}$  di sottins. di  $\mathbb{R}^n$  si dice  $\sigma$ -algebra se è stabile per unioni numerabili e complementazione:

$$S_k, S \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{R}^n \setminus S \in \mathcal{F}.$$

La classe degli ins. misurabili di  $\mathbb{R}^n$  e la *misura di Lebesgue* su  $\mathbb{R}^n$  saranno così denotate:

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \quad m : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty].$$

Il seguente Teorema raccoglie le proprietà strutturali della misura di Lebesgue.<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Nella teoria riemanniana la classe degli insiemi misurabili è stabile solo per unioni e intersezioni *finite*, e la relativa misura è solo *finitamente* additiva.

**Teorema 1.** [ $\sigma$ -additività]

$\mathcal{M}$  è una  $\sigma$ -algebra ed  $m$  è  $\sigma$ -additiva, cioè se gli  $\{S_k\}$  sono a due a due disgiunti vale l'eguaglianza

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(S_k).$$

**Dim.** Si veda ad esempio *E. Giusti, Analisi Matematica 2, Bollati-Boringhieri 1989.* □

**Corollario.** Per ogni  $\{S_k\} \subset \mathcal{M}$ , si ha

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k \in \mathcal{M}, \quad m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(S_k).$$

Se poi  $\{S_k\}$  è una successione crescente, e  $\{T_k\}$  una successione decrescente con  $m(T_1) < \infty$ , si ha

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(S_k) \equiv \sup_k m(S_k), \quad m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} T_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(T_k) \equiv \inf_k m(T_k).$$

**1.1.5 Insieme di Vitali**

Come si è visto, la famiglia  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  degli insiemi misurabili è una  $\sigma$ -algebra, cioè è stabile per unioni numerabili e passaggio a complementare. Si tratta di una classe molto ampia, tant'è vero che ha la stessa cardinalità ( $2^c$ ) della famiglia  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  di tutti i sottinsi. di  $\mathbb{R}^n$ . Tuttavia  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  non coincide con  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ .

**Esempio 3.** [**Vitali**] *Esiste qualche ins.  $V \subset \mathbb{R}$  che non è misurabile (secondo Lebesgue).*

**Dim.** Sull'intervallo reale  $I = [0, 1]$  definiamo la relazione di equivalenza

$$x \sim y \iff y - x \in \mathbb{Q},$$

e fissiamo una *sezione*  $V \subset I$ , cioè un sottoinsieme che interseca ogni classe di equivalenza in uno ed un solo punto. L'esistenza di una sezione è assicurata dall'*Assioma della Scelta*, cioè dal Postulato di Zermelo. Ora supponiamo per assurdo che  $V$  sia misurabile con misura  $m(V) = \delta$ . Dalla definizione di misura, si vede subito che la misura di Lebesgue è *invariante per traslazioni*, cioè per ogni vettore  $h \in \mathbb{R}^n$  risulta

$$S \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \implies \tau_h S \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \quad m(\tau_h S) = m(S),$$

dove

$$\tau_h S = \{x + h \mid x \in S\}.$$

Ma allora, per ogni  $q \in \mathbb{Q}$ , gli ins.  $\tau_q V$  sono misurabili e hanno tutti la stessa misura  $\delta \geq 0$ . Si ha poi:

$$\text{i)} \quad \tau_q V \cap \tau_{q'} V = \emptyset, \quad \forall q \neq q',$$

$$\text{ii)} \quad [0, 1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} \tau_q V \subset [0, 2].$$

La (i) si dimostra in questo modo: se  $x = v + q = v' + q'$ , allora  $v - v' \in \mathbb{Q}$  cioè  $v \sim v'$ ; ma in una sezione non possono trovarsi due diversi elementi equivalenti, quindi dev'essere  $v = v'$  da cui anche  $q = q'$ .

Per provare la (ii) notiamo che, essendo  $V$  una sezione, dato un qualunque  $x \in [0, 1]$ , nella classe di equivalenza di  $x$  deve trovarsi qualche  $v \in V$ , quindi  $x \sim v$ . Ma allora  $q \equiv x - v \in \mathbb{Q}$  cioè  $x \in \tau_q V$ , da cui la prima inclusione in (ii). La seconda inclusione è ovvia.

Per concludere, sia  $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ . Dalla (i), per le proprietà della misura di Lebesgue, si ricava:

$$m\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \tau_{q_k} V\right) = \sum_{k=0}^{\infty} m(\tau_{q_k} V) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta = \begin{cases} +\infty & \text{se } \delta > 0, \\ 0 & \text{se } \delta = 0. \end{cases}$$

Poichè entrambe le conclusioni sono in contraddizione con la (ii), l'insieme  $V$  non può essere misurabile. □

### 1.1.6 Funzioni misurabili

In questa sezione ci collochiamo nello spazio  $\mathbb{R}^n$ , scrivendo  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ . Cominciamo con l'introdurre la classe delle funzioni per le quali ha senso definire l'integrale.

#### Definizione 4. [funzioni misurabili]

Dato un insieme  $S \in \mathcal{M}$ , una funzione  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *misurabile* quando i suoi *insiemi di sotto-livello* sono tutti misurabili, cioè

$$\{x \in S : f(x) < \lambda\} \in \mathcal{M}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

La nozione di funzione misurabile si estende alle funzioni *non finite*  $f : S \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , richiedendo che anche i due insiemi  $f^{-1}(\{-\infty\})$  e  $f^{-1}(\{+\infty\})$  siano misurabili.

**Proposizione 2.** *La (1.2) è equivalente a ciascuna delle due condizioni seguenti:*

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{M}, \quad \forall \text{ aperto } A \subseteq \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

$$f^{-1}(C) \in \mathcal{M}, \quad \forall \text{ chiuso } C \subseteq \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

**Dim.** Notiamo anzitutto che (1.3) e (1.4) sono fra loro equivalenti; infatti se  $C$  ed  $A$  sono fra loro complementari, anche  $f^{-1}(C)$  ed  $f^{-1}(A)$  lo sono, e la classe  $\mathcal{M}$  è stabile per complementazione. Proviamo ora che (1.2) implica (1.3) (l'implicazione inversa è banale). Se consideriamo le *semirette sinistre*

$$A_\lambda = ] - \infty, \lambda[, \quad \overline{A_\lambda} = ] - \infty, \lambda],$$

la (1.2) afferma che  $f^{-1}(A_\lambda) \in \mathcal{M}$  per ogni  $\lambda$ ; ma allora anche  $f^{-1}(\overline{A_\lambda}) \in \mathcal{M}$  per ogni  $\lambda$ , infatti

$$\overline{A_\lambda} = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{\lambda+1/k} \implies f^{-1}(\overline{A_\lambda}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}(A_{\lambda+1/k}).$$

Conseguentemente, per ogni intervallo aperto  $I = ]\alpha, \beta[ \equiv A_\beta \setminus \overline{A_\alpha}$ , l'ins.  $f^{-1}(I) \equiv f^{-1}(A_\beta) \setminus f^{-1}(A_\alpha)$  è misurabile. A questo punto, per ottenere la (1.3) basta ricordare che ogni aperto  $A \subseteq \mathbb{R}$  è l'unione di una successione  $\{I_k\}$  di intervalli aperti, cosicché  $f^{-1}(A) = \bigcup_k f^{-1}(I_k) \in \mathcal{M}$ .  $\square$

Le funzioni misurabili formano una classe molto ampia: per costruire una funzione non misurabile occorre considerare la funzione caratteristica dell'insieme di Vitali, e quindi ricorrere al Lemma di Zorn.<sup>9</sup>

**Proposizione 3.** *Se  $\{f_k(x)\}$  è una successione di funzioni reali misurabili su qualche  $S \in \mathcal{M}$ , le funzioni*

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x), \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x), \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x), \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

*sono misurabili. In particolare il limite puntuale di funzioni misurabili, se esiste, è una funzione misurabile.*

*Somme e prodotti di funzioni misurabili sono misurabili, inoltre la composizione  $\psi \circ f$  di una funzione continua  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con una funzione misurabile  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  è misurabile.<sup>10</sup>*

<sup>9</sup> Nel seguito incontreremo solo funzioni ed insiemi misurabili, e quindi parleremo di "funzioni" e "insiemi" sottintendendo l'aggettivo "misurabile".

<sup>10</sup> Questa conclusione può essere falsa se si scambia l'ordine nella composizione: posto  $I = [0, 1]$ , si possono costruire un omeomorfismo  $\psi : I \rightarrow I$  ed una funzione misurabile  $f : I \rightarrow I$  in modo tale che  $f \circ \psi$  non sia misurabile. In particolare la composizione di due funzioni misurabili può risultare non misurabile.

**Dim.** Posto  $G = \inf f_k$ , dalla definizione di estremo inferiore segue che, per ogni dato  $x \in S$ ,

$$G(x) < \lambda \iff f_k(x) < \lambda \text{ per qualche } k,$$

cosicchè, per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ , vale l'eguaglianza

$$\{x \in S \mid G(x) < \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in S \mid f_k(x) < \lambda\}.$$

Ricordando la (1.2), possiamo allora concludere che, se tutte le  $f_k$  sono misurabili, anche  $G$  lo è. In modo analogo si procede per l'estremo superiore. Per quanto riguarda la misurabilità del massimo e minimo limite, basta ricordare che

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \inf_{k \geq j} f_k(x) \right\}, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \inf_{j \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{k \geq j} f_k(x) \right\}.$$

Per provare che la somma  $f + g$  di due funzioni misurabili è misurabile, osserviamo anzitutto che, per ogni coppia  $f, \varphi$  di funzioni misurabili, l'insieme

$$T(f, \varphi) = \{x \in S \mid f(x) < \varphi(x)\}$$

è misurabile. Infatti, per ogni  $x \in S$ , vale l'equivalenza

$$f(x) < \varphi(x) \iff f(x) < q < \varphi(x) \text{ per qualche numero razionale } q,$$

cosicchè, se  $\{q_k\}$  è l'insieme dei numeri razionali, risulta

$$T(f, \varphi) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ f^{-1} \left( [-\infty, q_k[ \right) \cap \varphi^{-1} \left( ]q_k, +\infty[ \right) \right\}.$$

Ma allora, dato che la funzione  $\varphi(x) = \lambda - g(x)$  è (ovviamente) misurabile, possiamo concludere che

$$\{x \in S \mid f(x) + g(x) < \lambda\} \equiv T(f, \lambda - g) \in \mathcal{M}.$$

La misurabilità della funzione composta  $\psi \circ f$ , con  $\psi$  continua, segue dalla Prop. 2 : se  $A \subseteq \mathbb{R}$  è un aperto, anche  $\psi^{-1}(A)$  è aperto in quanto  $\psi$  è una funzione continua e quindi

$$(\psi \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(\psi^{-1}(A)) \in \mathcal{M}.$$

Infine, per provare la misurabilità del prodotto notiamo che, per quanto appena provato sulle composizioni di funzioni, il quadrato di una funzione misurabile è misurabile: per concludere basta allora notare che

$$2fg = (f+g)^2 - (f^2 + g^2). \quad \square$$

Dalle Def. 1 e 4 segue che la *funz. caratteristica*  $\chi_S(x)$  di un dato insieme  $S$  (cioè la funzione che vale uno su  $S$  e zero altrove) è misurabile se e solo se  $S \in \mathcal{M}$ .

### Definizione 5. [funzioni semplici]

Si chiama *funzione semplice* (secondo Lebesgue) ogni funzione del tipo

$$\varphi(x) = \lambda_1 \chi_{S_1}(x) + \dots + \lambda_N \chi_{S_N}(x), \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad S_j \text{ ins. misurabili e limitati} \quad ^{11}$$

Ovviamente questa rappresentazione non è unica; in particolare possiamo sempre trovare una rappresentazione in cui gli  $\{S_j\}$  siano disgiunti a due a due: in tal caso definiamo l'integrale di  $\varphi(x)$  ponendo

$$\int_S \varphi dx = \sum_{j=1}^N \lambda_j m(S_j).$$

<sup>11</sup> Nella teoria riemanniana, le funzioni semplici quelle in cui gli ins. caratteristici  $S_j$  sono degli intervalli di  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2. [approssimazione con funzioni semplici]** Se  $S$  è un ins. misurabile e limitato di  $\mathbb{R}^n$  ed  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione misurabile e limitata, per ogni  $\varepsilon > 0$  esistono due funzioni semplici  $\varphi, \psi$ , tali che

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \quad (1.5)$$

$$\int_S \psi dx - \int_S \varphi dx \leq \varepsilon. \quad (1.6)$$

**Dim.** Sia  $\alpha < f(x) < \beta$ : per ogni  $\varepsilon$  scegliamo dei numeri reali  $\lambda_0, \dots, \lambda_N$  in modo che risulti

$$\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{N-1} < \lambda_N = \beta, \quad \lambda_j - \lambda_{j-1} \leq \frac{\varepsilon}{m(S)}$$

e definiamo gli ins.  $S_1 = f^{-1}([\lambda_0, \lambda_1])$  e  $S_j = f^{-1}(] \lambda_{j-1}, \lambda_j])$ ,  $2 \leq j \leq N$ . Tali insiemi sono misurabili e formano una partizione di  $S$ . Per avere la (1.5) e la (1.6), basterà allora prendere le funzioni semplici

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_{j-1} \chi_{S_j}(x), \quad \psi(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \chi_{S_j}(x). \quad \square$$

### 1.1.7 Integrale delle funzioni misurabili

Data una funzione misurabile  $f : S \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ,  $S \in \mathcal{M}$ , definiamo (per  $r \in \mathbb{R}$ ) le *troncate superiori*, la *parte positiva* e la *parte negativa* di  $f(x)$ :

$$f^{[r]}(x) = \min \{f(x), r\}, \quad f^+(x) = \max \{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = -\min \{f(x), 0\}.$$

Le funzioni  $f^+$  e  $f^-$  sono  $\geq 0$ , cioè hanno valori in  $[0, +\infty]$ , e risulta  $f = f^+ - f^-$ .

**Definizione 6. [integrale]**

- Se  $S$  è limitato ed  $f$  è limitata su  $S$ , poniamo (al variare di  $\varphi, \psi$  fra tutte le funzioni semplici su  $S$ )

$$\int_S f dx = \sup_{\varphi \leq f} \int_S \varphi dx \equiv \inf_{\psi \geq f} \int_S \psi dx.$$

- Se  $f : S \rightarrow [0, +\infty]$ , poniamo

$$\int_S f dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{B_r} f^{[r]} dx \equiv \sup_{r > 0} \int_{B_r} f^{[r]} dx.$$

- Nel caso generale, se una almeno fra le due funzioni (non negative)  $f^-, f^+$  ha integrale finito, poniamo

$$\int_S f dx = \int_S f^+ dx - \int_S f^- dx. \quad (1.7)$$

In tal caso  $f(x)$  è inferiormente o superiormente *semi-integrabile* (e il suo integrale può essere  $\pm \infty$ ).

Se le funzioni  $f^-$  ed  $f^+$  hanno integrale finito, la  $f$  si dice *integrabile* (o *sommabile*) su  $S$ , il che, essendo  $|f| = f^+ + f^-$ , equivale a dire che  $f$  è *assolutamente integrabile*, cioè

$$\int_S |f(x)| dx < +\infty.$$

Se  $f^-$  ed  $f^+$  hanno integrale infinito, non si può dare un senso alla (1.7) e l'integrale di  $f$  è *indeterminato*.

### Notazione

Nel seguito indicheremo con  $\mathcal{L}^1(S)$  la classe delle funzioni integrabili su  $S$ .

**Osservazione 2.** Se  $f : S \rightarrow [0, +\infty]$  è misurabile, l'insieme  $T = f^{-1}(+\infty)$  è misurabile e

$$\int_S f dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } m(T) > 0 \\ \int_{S \setminus T} f dx & \text{se } m(T) = 0. \end{cases}$$

Dunque, ogni  $f : S \rightarrow [-\infty, +\infty]$  che abbia integrale finito è *quasi-ovunque finita*.

**Esercizio.** Provare che per ogni funzione inferiormente semi-integrabile si ha

$$\int_S f(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_S f^{[r]}(x) dx. \quad (1.8)$$

Grazie alle definizioni date, possiamo estendere per continuità a tutte le funzioni integrabili alcune formule che sono immediate nel caso delle funzioni semplici:

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 &\implies \int_S f dx \geq 0, \\ \int_{S \cup T} f dx + \int_{S \cap T} f dx &= \int_S f dx + \int_T f dx, \\ \int_S (f_1 + f_2) dx &= \int_S f_1 dx + \int_S f_2 dx, \\ \int_S f(x+h) dx &= \int_{S-h} f(x) dx, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \text{dove } S-h = \{x-h \mid x \in S\}. \end{aligned}$$

**Proposizione 4.** Per ogni funzione misurabile  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  si ha:

$$f(x) \geq 0, \quad \int_S f(x) dx = 0 \implies f(x) = 0 \quad \text{q.o. su } S.$$

**Dim.** Supponendo per assurdo che  $f(x) > 0$  su qualche  $T \subset S$  di misura positiva, consideriamo la seguente decomposizione di  $T$ :

$$T = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k, \quad \text{con } T_k = \{x \in T : f(x) > 1/k\}.$$

Per la  $\sigma$ -sub-additività della misura, gli insiemi  $T_k$  non possono avere tutti misura nulla, altrimenti anche la loro unione  $T$  avrebbe misura nulla. D'altra parte se, per qualche  $k$ , fosse  $m(T_k) = \delta > 0$  avremmo

$$\int_S f dx \geq \int_{T_k} f dx \geq \frac{\delta}{k} > 0,$$

in contraddizione con l'ipotesi che  $f$  ha integrale nullo su  $S$ . □

A questo punto, siamo in grado di provare l'inverso del Teor. 2 :

**Proposizione 5.** Sia  $S$  un'ins. misurabile e limitato di  $\mathbb{R}^n$ . Una funzione  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  tale che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esistono due funzioni semplici  $\varphi, \psi$  verificanti (1.5) e (1.6), è necessariamente misurabile.

**Dim.** Prendendo  $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, \dots$ , arriviamo a costruire due successioni di funzioni semplici  $\{\varphi_k(x)\}$  e  $\{\psi_k(x)\}$ , la prima crescente e la seconda decrescente, tali che

$$\varphi_k(x) \leq f(x) \leq \psi_k(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \int_S \psi_k dx - \int_S \varphi_k dx \right\} = 0.$$

Allora le funzioni  $\tilde{\varphi} \equiv \sup_k \varphi_k$  e  $\tilde{\psi} \equiv \inf_k \psi_k$  sono misurabili (Prop.3) ed integrabili (Def. 6), e si ha

$$\tilde{\varphi}(x) \leq f(x) \leq \tilde{\psi}(x), \quad \int_S \tilde{\varphi} dx = \int_S f dx = \int_S \tilde{\psi} dx.$$

Ora  $\tilde{\psi} - \tilde{\varphi}$  è una funzione non negativa con integrale nullo su  $S$  quindi (Prop.4) è q.o. nulla. Pertanto le tre funzioni  $\tilde{\psi}$ ,  $f$ ,  $\tilde{\varphi}$ , sono equivalenti nel senso della (1.1) e anche  $f(x)$  risulta misurabile come le altre due.  $\square$

**Osservazione 3.** Dalla dimostrazione della Prop. 5, segue che ogni funzione misurabile e limitata su un insieme limitato di  $\mathbb{R}^n$  è il limite quasi-ovunque di una successione crescente  $\{\varphi_k\}$  di funzioni semplici.

**Osservazione 4.** Il Teor. 2 e la Prop.5 mostrano che, per funzioni limitate su un ins. limitato, le nozioni di funzione misurabile e di funzione integrabile coincidono.

## 1.2 Principali proprietà dell'integrale

### 1.2.1 Assoluta continuità

Richiamiamo un semplice fatto che utilizzeremo nel seguito:

**Esercizio.** Date delle successioni  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\beta_{k,j}\}$ ,  $\{\gamma_j\}$  ( $k, j \in \mathbb{N}$ ) di numeri reali, si ha:

$$\left\{ |\alpha_k| \leq \beta_{k,j} + \gamma_j, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{k,j} = 0 \quad \forall j, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_j = 0 \right\} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0. \quad (1.9)$$

**Teorema 3.** [assoluta continuità dell'integrale] Per ogni  $f \in \mathcal{L}^1(S)$  si ha

$$\lim_{\substack{m(T) \rightarrow 0 \\ T \subset S}} \int_T |f| dx = 0. \quad (1.10)$$

**Dim.** Se  $f(x)$  è limitata la (1.10) è ovvia. Nel caso generale, rimpiazzando  $f$  con  $|f|$ , possiamo supporre  $f \geq 0$ , e quindi, per ogni successione di ins.  $\{T_k\} \subset S$  con  $\{m(T_k)\} \rightarrow 0$ , otteniamo

$$\int_{T_k} f dx = \int_{T_k} f^{[r]} dx + \int_{T_k} (f - f^{[r]}) dx \leq r m(T_k) + \int_S (f - f^{[r]}) dx \equiv \beta_{k,r} + \gamma_r \quad \forall r > 0.$$

Ora, per ogni fissato  $r$ ,  $\{\beta_{k,r}\} \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \infty$ , mentre per l'integrabilità della  $f$  (cf. la (1.8)) risulta  $\{\gamma_r\} \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow +\infty$ . Ricordando la (1.9), otteniamo la (1.10).  $\square$

**Corollario.** Se  $\{S_k\} \subset \mathcal{M}$  una successione crescente,  $S = \cup_k S_k$ ,  $f$  una funz. misurabile  $\geq 0$  su  $S$ , allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{S_k} f(x) dx = \int_S f(x) dx.$$

### 1.2.2 Convergenza dominata

**Teorema 4.** [Lebesgue] Sia  $\{f_k\}$  una successione di funzioni misurabili su  $S \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{q.o. su } S, \quad (1.11)$$

$$|f_k(x)| \leq G(x) \quad \text{per qualche } G \in \mathcal{L}^1(S); \quad (1.12)$$

allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_S f_k dx = \int_S f dx. \quad (1.13)$$

**Dim.** Possiamo subito ridurci al caso in cui  $\{f_k(x)\} \rightarrow f(x)$  in ogni punto  $x \in S$ : basta modificare le  $f_k(x)$  ponendole zero sull'insieme (di misura nulla) dei punti  $x$  in cui non si ha convergenza. Il punto centrale della dimostrazione consiste nel tradurre la (1.11) in termini degli *insiemi di sottolivello*:

$$S_k(\varepsilon) = \left\{ x \in S : |f(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon \right\}, \quad S'_k(\varepsilon) = \bigcap_{j=k}^{\infty} S_j(\varepsilon) \quad (\varepsilon > 0).$$

Notiamo che gli insiemi  $\{S'_k(\varepsilon)\}$  formano una successione crescente. L'ipotesi (1.11) equivale a dire che

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S'_k(\varepsilon) \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j \geq k} S_j(\varepsilon),^{12} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (1.14)$$

infatti, fissato  $\varepsilon$ , dire che  $\{f_k(x)\} \rightarrow f(x)$  in qualche punto  $x \in S$ , vuol dire che esiste qualche  $k = k(\varepsilon)$  per cui  $|f(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon$  per  $j \geq k$ , cioè  $x \in S'_k(\varepsilon)$ .<sup>13</sup>

Proseguiamo la dimostrazione supponendo dapprima  $m(S) < \infty$ . In tal caso la (1.14) implica che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} m(S \setminus S'_k(\varepsilon)) = 0,$$

per ogni  $\varepsilon > 0$ , e quindi, per l'assoluta continuità della  $G(x)$  (vedi (1.10)),

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{S \setminus S'_k(\varepsilon)} G(x) dx = 0. \quad (1.15)$$

Dato che  $|f(x) - f_k(x)| \leq 2G(x)$ , troviamo

$$\int_S |f - f_k| dx = \int_{S \setminus S'_k(\varepsilon)} |f - f_k| dx + \int_{S'_k(\varepsilon)} |f - f_k| dx \leq 2 \int_{S \setminus S'_k(\varepsilon)} G dx + \varepsilon m(S) = \beta_{k,\varepsilon} + \gamma_\varepsilon$$

e allora, essendo  $\{\beta_{k,\varepsilon}\} \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \infty$  mentre  $\{\gamma_\varepsilon\} \rightarrow 0$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la tesi (1.13) è assicurata dalla (1.9).

Sia ora  $m(S) = +\infty$ : per ogni palla  $B_r$  abbiamo

$$\int_S |f - f_k| dx \leq \int_{S \cap B_r} |f - f_k| dx + 2 \int_{S \setminus B_r} G dx \equiv \beta_{k,r} + \gamma_r$$

e quindi la (1.13) si consegue notando che, per ogni  $r$ ,  $\{\beta_{k,r}\} \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \infty$  (infatti  $S \cap B_r$  ha misura finita), mentre  $\{\gamma_r\} \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$  dato che  $G(x)$  ha integrale finito su  $S$ .  $\square$

### 1.2.3 Teorema di Beppo Levi

Un'interessante variante del Teorema di Lebesgue<sup>14</sup> è il

**Teorema 5. [Beppo Levi]** *Se  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$  è una successione crescente di funzioni misurabili a valori in  $[0, +\infty]$  definite su un ins.  $S$ , e  $f(x) = \sup_k f_k(x)$ , si ha:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_S f_k dx = \int_S f dx. \quad (1.16)$$

*Lo stesso vale se  $-G \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ , oppure  $\dots \leq f_2 \leq f_1 \leq G$ , per qualche funzione integrabile  $G(x) \geq 0$ .*

<sup>12</sup> L'ins.  $S' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j \geq k} S_j$  si chiama *massimo limite* della successione  $\{S_k\}$ ; analoga è la definizione del *minimo limite*.

<sup>13</sup> Il caso particolare della *convergenza uniforme*  $\{f_k\} \rightarrow f$  si presenta quando  $S'_k(\varepsilon) \equiv S$  per  $k \geq \bar{k}(\varepsilon)$ .

<sup>14</sup> I Teoremi di Lebesgue e B. Levi sono di fatto *equivalenti* nel senso che ciascuno dei due è facilmente deducibile dall'altro.

**Dim.** Posto

$$\alpha_k = \int_S f_k(x) dx, \quad \alpha_\infty = \int_S f(x) dx,$$

vediamo che  $\{\alpha_k\}$  è una successione crescente, con  $0 \leq \alpha_k \leq \alpha_\infty \leq +\infty$ . Se la successione  $\{\alpha_k\}$  è illimitata, la (1.16) è ovvia poichè entrambi i termini sono infiniti, supporremo allora che  $\alpha_k \leq M < \infty$ . Se proveremo che  $\alpha_\infty \leq M$ , potremo applicare il Teorema di Lebesgue per ottenere la (1.16).

Per provare che  $\alpha_\infty \leq M$ , definiamo, per ogni  $r > 0$ , le *funzioni troncate* (sia nel codominio che nel dominio)

$$f_k^{[r]}(x) = \max \{f_k(x), r\} \chi_{B_r}(x), \quad f^{[r]}(x) = \max \{f(x), r\} \chi_{B_r}(x) \quad (r > 0).$$

Si ha allora

$$0 \leq f_k^{[r]}(x) \leq f^{[r]}(x), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k^{[r]}(x) = f^{[r]}(x), \quad \forall x \in S,$$

e quindi, grazie al Teor. di Lebesgue,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_S f_k^{[r]} dx = \int_S f^{[r]} dx. \quad (1.17)$$

D'altra parte per ipotesi sappiamo che

$$\int_S f_k^{[r]} dx \leq \int_S f_k dx \leq M,$$

cosicchè dalla (1.17) si ricava che

$$\int_S f^{[r]} dx \leq M.$$

Passando al limite per  $r \rightarrow +\infty$  troviamo che  $\alpha_\infty \leq M$ , cioè la nostra tesi.

I casi in cui  $f_k \geq -G$ ,  $f_k \leq G$ , si riducono al caso precedente considerando le funzioni  $f_k + G$ ,  $G - f_k$ .  $\square$

L'esempio seguente mostra la necessità di una maggiorante integrabile per passare al limite sotto integrale:

**Esempio 4.** Per  $k \rightarrow \infty$  le funzioni

$$f_k(x) = \frac{1}{x} \chi_{I_k}(x), \quad \text{dove } I_k = \left[ \frac{1}{2k}, \frac{1}{k} \right],$$

convergono puntualmente verso la funzione nulla, mentre il loro integrale su  $[0, 1]$  è  $\log 2$ .

## 1.2.4 Integrali iterati

Di solito l'integrale di funzione  $f(x)$  di una sola variabile reale si calcola cercando la primitiva  $F(x)$  di  $f(x)$ . Per calcolare l'integrale doppio di una funzione  $f(x, y)$  si integra prima tale funzione rispetto ad una delle variabili e poi si integra la funzione risultante rispetto all'altra variabile. Più in generale vale il

**Teorema 6. (Fubini-Tonelli)** *Dati due insiemi,  $S \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^h)$ ,  $T \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$ , ed una funzione misurabile  $f(x, y) \geq 0$  su  $S \times T$ , si ha:*

- per quasi-ogni  $x \in S$ , la funzione  $y \mapsto f(x, y)$  è misurabile su  $T$ ,
- la funzione  $F : x \mapsto \int_T f(x, y) dy$  è q.o. definita e misurabile su  $S$ ,
- $\iint_{S \times T} f(x, y) dx dy = \int_S \left\{ \int_T f(x, y) dy \right\} dx.$  (1.18)

Stesse conclusioni per  $f \in \mathcal{L}^1(S \times T)$  (anche se di segno variabile); in tal caso  $F(x)$  risulta q.o. finita su  $S$ .

La dim. si basa su due Lemmi. Il primo di questi è il Teorema stesso con  $f(x)$  funzione caratteristica :

**Lemma 1.** Dato un ins. misurabile  $A \subseteq \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{h+k}$ , consideriamo le sezioni verticali

$$A_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^k : (x, y) \in A \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^h.$$

Si ha allora:

- a)  $A_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$  per quasi-ogni  $x \in \mathbb{R}^h$ ,
- b) la funzione  $x \mapsto m_k(A_x)$  è misurabile su  $\mathbb{R}^h$ ,
- c)  $m_n(A) = \int_{\mathbb{R}^h} m_k(A_x) dx$ .

**Dim.** L'idea è di approssimare, dall'interno e dall'esterno, l'insieme  $A$  con due successioni monotone di insiemi di tipo speciale per i quali le conclusioni del Lemma si conseguono facilmente.

Se  $A$  è un plurintervallo di  $\mathbb{R}^n$ , (a), (b) e (c) sono immediate. In questo caso anche le sezioni  $A_x$  sono dei plurintervalli di  $\mathbb{R}^k$ . Se poi  $A \equiv \Omega$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , le sezioni  $\Omega_x$  sono degli aperti di  $\mathbb{R}^k$  e quindi la (a) è ovvia. Per ogni successione crescente di plurintervalli  $\{D_j\}$  invadenti  $\Omega$  (vedi la Prop. 1) si ha allora

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m_n(D_j) = m_n(\Omega) \quad (1.19)$$

e inoltre le sezioni  $\{D_{j,x}\}$  formano un successione crescente di plurintervalli di  $\mathbb{R}^k$  che invadono  $\Omega_x$  cosicchè

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m_k(D_{j,x}) = m_k(\Omega_x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^h.$$

Da ciò seguono due conclusioni: anzitutto, dato che il limite di funzioni misurabili è misurabile, la funzione  $x \mapsto m_k(\Omega_x)$  è misurabile, il che prova la (b) con  $A = \Omega$ ; inoltre, applicando il Teor. di Beppo-Levi, si ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^h} m_k(D_{j,x}) dx = \int_{\mathbb{R}^h} m_k(\Omega_x) dx. \quad (1.20)$$

Quindi, partendo dalla semplice formula (che poi è la (c) con  $A = D_j$ )

$$m_n(D_j) = \int_{\mathbb{R}^h} m_k(D_{j,x}) dx, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

e passando al limite per  $j \rightarrow \infty$ , grazie alle (1.19) - (1.20) otteniamo la (c) con  $A = \Omega$ .

In modo del tutto analogo si tratta il caso in cui  $A \equiv K$  è un compatto di  $\mathbb{R}^n$ .

Consideriamo infine il caso in cui  $A$  è un arbitrario insieme misurabile di  $\mathbb{R}^n$ . Ricordando la definizione di insieme misurabile (Def. 1), possiamo costruire due insiemi,  $A'$ ,  $A''$ , del tipo seguente :

$$A' = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j, \quad A'' = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Omega_j, \quad (1.21)$$

dove i  $\{K_j\}$  sono dei compatti di  $\mathbb{R}^n$  e gli  $\{\Omega_j\}$  degli aperti, in modo tale che risulti

$$A' \subseteq A \subseteq A'', \quad m_n(A') = m_n(A) = m_n(A''). \quad (1.22)$$

Gli insiemi  $A'$  ed  $A''$  hanno la particolarità che le loro sezioni  $A'_x$  ed  $A''_x$  sono a loro volta unioni numerabili di chiusi ed intersezioni numerabili di aperti di  $\mathbb{R}^k$ , e quindi sono ins. misurabili di  $\mathbb{R}^k$ . Ragionando come sopra, vediamo poi che per  $A'$  e  $A''$  valgono anche (b) e (c), cosicchè, tenuto conto della (1.22), troviamo :

$$\int_{\mathbb{R}^k} m_k(A'_x) dx = \int_{\mathbb{R}^k} m_k(A''_x) dx \equiv m_n(A).$$

<sup>15</sup> Gli insiemi che si ottengono come unione numerabile di chiusi si dicono di tipo  $F_\sigma$ , mentre quelli che si ottengono come intersezione numerabile di aperti si dicono di tipo  $G_\delta$ . Tutti questi ins. appartengono alla più vasta classe  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  dei boreliani, che è definita come la più piccola  $\sigma$ -algebra (famiglia di ins. stabile per unione e intersezione numerabile e per passaggio a complementare) contenente tutti gli aperti. Esistono degli ins. misurabili che non sono boreliani.

Dunque la funzione misurabile e non-negativa

$$\theta(x) \equiv m_k(A''_x \setminus A'_x)$$

ha integrale nullo su  $A$ , e quindi è q.o. nulla (Prop. 4). Ciò implica la (a): infatti per gli  $x \in A$  in cui  $\theta(x) = 0$ ,  $A_x$  differisce dall'insieme (misurabile)  $A'_x$  per un ins. di misura nulla e quindi è a sua volta misurabile in  $\mathbb{R}^k$ .

Le proprietà (b) e (c) per l'insieme  $A$  seguono dalle analoghe proprietà per l'insieme  $A'$ : infatti la funzione  $x \mapsto m_k(A_x)$  è q.o. uguale alla funzione  $x \mapsto m_k(A'_x)$  e  $m_n(A) = m_n(A')$ .  $\square$

**Lemma 2.** *Sia  $\{f_k(x, y)\}$  una successione crescente di funzioni non-negative su  $A \times B$  tali che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x, y) = f(x, y) \quad \text{q.o. su } A \times B. \quad (1.23)$$

*Allora, se ciascuna delle  $f_k(x, y)$  verifica le conclusioni del Teor. 6, le stesse conclusioni valgono per  $f(x, y)$ .*

**Dim.** Dalla (1.23) si ricava che, per quasi-ogni  $x \in A$ ,

$$\{f_k(x, \cdot)\} \rightarrow f(x, \cdot) \quad \text{q.o. su } B.$$

Infatti, se  $S$  è l'insieme dei punti  $(x, y) \in A \times B$  in cui  $\{f_k(x, y)\}$  non converge ad  $f(x, y)$ , si ha  $m_n(S) = 0$ , quindi, per la (c) del Lemma 1,  $m_k(S_x) = 0$  per quasi-ogni  $x \in A$ . Per ottenere la tesi del Lemma basta allora ricorrere al Teor. di Beppo Levi.  $\square$

**Dim. del Teorema 6.** Se  $f(x, y) \geq 0$ , possiamo approssimare puntualmente la  $f$  con le sue troncate  $f^{[r]}(x, y)$  ( $r \rightarrow +\infty$ ), le quali formano una successione crescente di funzioni limitate nulle fuori di un compatto. Ora ogni funzione di questo tipo è il limite quasi-ovunque di una successione crescente di funzioni semplici (Prop. 5) e il Lemma 1 garantisce la tesi nel caso in cui  $f(x, y)$  è una funzione semplice. Una ripetuta applicazione del Lemma 2 ci permette di concludere la dimostrazione.

Se  $f(x, y)$  ha segno variabile ma è sommabile su  $S \times T$ , applichiamo la (1.18) alle funzioni  $f^+$  e  $f^-$  e sommiamo.  $\square$

**Corollario.** *Se  $f(x, y) \in \mathcal{L}^1(S \times T)$ , la funzione*

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(x, y) dy$$

*è quasi-ovunque finita e sta in  $\mathcal{L}^1(S)$ .*

Per la validità dell'eguaglianza (1.18) l'ipotesi che  $f$  sia integrabile o non-negativa su  $S \times T$  è necessaria, nel senso che esistono funzioni  $f(x, y)$  misurabili per cui gli integrali al membro destro della (1.18) hanno senso e sono finiti, mentre l'integrale al membro sinistro non è definito:

**Esempio 5.** *L'insieme*

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|x|}{2} \leq |y| \leq 2|x| \right\}$$

*è formato da quattro coni con vertice nell'origine,  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ , contenuti rispettivamente nel I, II, III e IV quadrante del piano. La funzione  $f(x, y)$  che vale 1 su  $C_1 \cup C_3$  e  $-1$  su  $C_2 \cup C_4$  verifica*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{e quindi anche} \quad \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right\} dx = 0,$$

*mentre il suo integrale doppio su  $\mathbb{R}^2$  è indeterminato poichè  $f^+(x, y)$  ed  $f^-(x, y)$  hanno integrale infinito.*

### 1.3 Cambiamento di variabili

**Teorema 7.** Un diffeomorfismo  $\mathcal{C}^1$  (cioè un'applicazione biunivoca di classe  $\mathcal{C}^1$  con inversa  $\mathcal{C}^1$ )  $\Psi : \Omega \rightarrow \Omega'$  fra due aperti di  $\mathbb{R}^n$  trasforma ogni ins. misurabile  $S \subseteq \Omega$  in un ins. misurabile  $S' \equiv \Psi(S) \subseteq \Omega'$ , ed ogni funzione misurabile  $f : S' \rightarrow \mathbb{R}$  in una funzione misurabile  $f \circ \Psi : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Si ha poi:

$$\int_{S'} f(y) dy = \int_S f(\Psi(x)) |J_\Psi(x)| dx, \quad \text{dove } J_\Psi(x) = \det D\Psi(x).$$

In particolare:

$$m(S') = \int_S |J_\Psi(x)| dx.$$

**Dim.** Si veda ad esempio E. Giusti, *Analisi Matematica 2*, Bollati-Boringhieri 1989.

### 1.4 Integrale delle funzioni complesse

Abbiamo fin qui considerato solo funzioni reali (o a valori nella retta reale esetta  $[-\infty, +\infty]$ ) ma la teoria di Lebesgue si estende in modo naturale al caso delle funzioni a valori complessi: una funzione  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  si dirà misurabile, o integrabile, se tali risultano entrambe le funzioni reali  $\Re f(x)$  e  $\Im f(x)$ . Si porrà allora:

$$\int_S f(x) dx = \int_S \Re f(x) dx + i \int_S \Im f(x) dx.$$

Tutti i risultati fin qui ottenuti si estendono al caso complesso, con l'ovvia eccezione di quelli relativi alle funzioni semi-integrabili e al massimo/minimo limite.

### 1.5 Misure astratte. Delta di Dirac.

Data una  $\sigma$ -algebra  $\Sigma$  di insiemi di  $\mathbb{R}^n$ , ad esempio l'algebra dei boreliani, si chiama *misura* su  $\Sigma$  ogni funzione d'insieme  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  che sia  $\sigma$ -additiva, cioè verifichi la proprietà (ii) del Teor. 1. L'esempio tipico si ottiene fissando una funzione  $f \geq 0$  appartenente allo spazio  $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ , cioè integrabile su ogni compatto di  $\mathbb{R}^n$ , e considerando sulla classe  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  degli ins. misurabili la funzione d'insieme

$$\mu(S) = \int_S f(x) dx. \tag{1.24}$$

A partire da una qualunque misura si può sviluppare una teoria dell'integrazione analoga a quella di Lebesgue, definendo le funzioni  $\mu$ -misurabili  $\varphi(x)$  e gli integrali (rispetto a  $\mu$ ). Per questi ultimi si usa la notazione

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu.$$

Una misura  $\mu$  sulla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  si dice *assolutamente continua* (rispetto alla misura di Lebesgue) se

$$\lim_{m(S) \rightarrow 0} \mu(S) = 0. \tag{1.25}$$

Il Teorema 3 stabilisce che ogni misura del tipo (1.24) è assolutamente continua.<sup>17</sup>

<sup>16</sup> Si può dimostrare che la (1.25) equivale a dire che  $\mu(S) = 0$  per ogni  $S$  di misura nulla secondo Lebesgue.

<sup>17</sup> Vale anche il viceversa: le sole misure assolutamente continue sono quelle del tipo (1.25).

Un esempio tipico di misura non assolutamente continua è <sup>TM</sup>la misura di Dirac, o *Delta di Dirac*, che si definisce sulla  $\sigma$ -algebra di tutti i sottoinsiemi  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  ponendo

$$\delta(S) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \in S, \\ 0, & \text{se } 0 \notin S. \end{cases}$$

Ogni funzione  $\varphi(x)$  su  $\mathbb{R}^n$  risulta  $\delta$ -integrabile, con integrale

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Talvolta la Delta di Dirac  $\delta(x)$  viene trattata alla stregua di una funzione: si tratta però di una funzione *sui generis*, infatti  $\delta(x) \equiv 0$  sull'aperto  $\{x \neq 0\}$ , ma  $\delta \neq 0$  avendo integrale 1 su  $\mathbb{R}^n$ .

Possiamo definire anche la Delta di Dirac concentrata in un arbitrario punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ : si tratta della misura, indicata con  $\delta_{x_0} \equiv \delta(x - x_0)$ , che vale 1 sugli insiemi contenenti  $x_0$  e 0 su tutti gli altri.

## 1.6 Riepilogo

- **Plurintervalli.**

La misura elementare di un intervallo  $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$  è  $|I| = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ . Per ogni plurintervallo  $D = I_1 \cup \cdots \cup I_N$ , con parti interne degli intervalli  $I_k$  a due a due disgiunte, si pone

$$m(D) = |I_1| + \cdots + |I_N|.$$

- **Aperti e chiusi.**

Ogni aperto di  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  è l'unione di una successione di intervalli. La sua *misura*,  $m(\Omega)$ , è l'estremo superiore delle misure dei plurintervalli  $D \subset \Omega$ , mentre la *misura* di un compatto  $K$  è l'estremo inferiore delle misure dei plurintervalli  $D' \supset K$ .

- **Insiemi limitati misurabili.**

Un insieme limitato  $S \subset \mathbb{R}^n$  è *misurabile* se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esistono un aperto  $\Omega$  ed un chiuso  $K$  tali che:

$$K \subseteq S \subseteq \Omega, \quad m(\Omega) - m(K) \leq \varepsilon,$$

e la *misura* di  $S$  è:

$$m(S) = \inf_{\Omega \supseteq S} m(\Omega) \equiv \sup_{K \subseteq S} m(K).$$

- **Insiemi misurabili.**

Un arbitrario insieme  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  è *misurabile* se tale è la sua intersezione con ogni palla chiusa  $B_r$  di centro l'origine e raggio  $r$ . La *misura* di  $S$  è:

$$m(S) = \lim_{r \rightarrow +\infty} m(S \cap B_r) \equiv \sup_{r > 0} m(S \cap B_r).$$

La classe degli insiemi misurabili di  $\mathbb{R}^n$  viene indicata con  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ .

- **Proprietà della classe  $\mathcal{M}$**

$\mathcal{M}$  è una  $\sigma$ -algebra, cioè è stabile per complementazione ed unione numerabile:

$$\forall S, S_k \in \mathcal{M}: \quad \mathbb{R}^n \setminus S \in \mathcal{M}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \in \mathcal{M}.$$

Conseguentemente,  $\mathcal{M}$  è stabile anche per intersezione numerabile.

- **Proprietà della misura**

La misura  $m : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$  è una funzione d'insieme *numerabilmente additiva*, nel senso che

$$\forall \{S_k\} \subset \mathcal{M} : \quad m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(S_k) \quad \text{se gli } S_k \text{ sono a due a due disgiunti.}$$

Nel caso generale si ha solo la *sub-additività*:  $m(\bigcup S_k) \leq \sum m(S_k)$ .

- **Insieme di Vitali.**

Usando l'Assioma della Scelta si può costruire un insieme  $V \subset \mathbb{R}^n$  che non è misurabile.

- **Insiemi di misura nulla.**

Se  $S$  è un ins. con misura  $m(S) = 0$ , ogni  $T \subset S$  è misurabile e ha misura  $m(T) = 0$ .

- **Quasi-ovunque**

Una proposizione  $P(x)$  dipendente dai punti  $x \in S$  si dice *quasi-ovunque* (q.o.) vera su  $S$  se è vera per ogni  $x$  tranne al più un'insieme di misura nulla.

- **Insieme di Cantor.**

L'insieme di Cantor  $C \subset \mathbb{R}$  è un chiuso di misura nulla che ha la cardinalità del continuo.

- **Funzioni misurabili**

Se  $S \in \mathcal{M}$ , una funzione  $f : S \rightarrow [-\infty, +\infty]$  è *misurabile* se i suoi insiemi di sotto-livello sono misurabili:

$$\forall \lambda \in [-\infty, +\infty] : \quad \left\{x \in S : f(x) < \lambda\right\} \in \mathcal{M}.$$

- **Proprietà delle funzioni misurabili**

Se  $\{f_k\}$  è una successione di funzioni misurabili su  $S$ , tali risultano le funzioni  $\sup_k \{f_k\}$ ,  $\inf_k \{f_k\}$ ,  $\liminf_k f_k$ ,  $\limsup_k f_k$ . In particolare il limite puntuale di funzioni misurabili (se esiste) è una funzione misurabile.

Se  $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$  sono misurabili, anche  $f + g$  ed  $f \cdot g$  lo sono.

- **Funzioni semplici**

Le *funzioni semplici* sono le combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche di ins. misurabili e limitati:

$$\varphi(x) = \lambda_1 \chi_{S_1}(x) + \cdots + \lambda_N \chi_{S_N}(x), \quad \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Supponendo che gli  $S_j$  siano a due a due disgiunti, si pone

$$\int_S \varphi dx = \lambda_1 m(S_1) + \cdots + \lambda_N m(S_N).$$

- **Integrale di una funzione limitata su un ins. limitato**

Se  $S$  è un ins. misurabile e limitato di  $\mathbb{R}^n$  ed  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione misurabile e limitata, per ogni  $\varepsilon > 0$  possiamo trovare due funzioni semplici  $\varphi, \psi$  tali che

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \quad \int_S \psi dx - \int_S \varphi dx \leq \varepsilon.$$

L'*integrale* di  $f$  è definito da

$$\int_S f dx = \sup_{\varphi \leq f} \int_S \varphi dx \equiv \inf_{\psi \geq f} \int_S \psi dx.$$

- **Integrale di una funzione non-negativa**

Se  $f : S \rightarrow [0, +\infty]$  è una funzione misurabile non-negativa su un insieme  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , si pone

$$\int_S f dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{S \cap B_r} f^{[r]} dx \equiv \sup_{r > 0} \left\{ \int_{S \cap B_r} f^{[r]} dx \right\}$$

dove  $f^{[r]}(x) = \min \{f(x), r\}$  è la *troncata* superiore della  $f(x)$  al livello  $r$ .

- **Funzioni integrabili e semi-integrabili**

Se  $f : S \rightarrow [-\infty, +\infty]$  consideriamo la decomposizione in parte positiva e parte negativa:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad \text{dove } f^+ = \max \{f, 0\}, \quad f^- = -\min \{f, 0\}.$$
<sup>18</sup>

Se gli integrali su  $S$  delle funzioni  $f^+$  ed  $f^-$  sono entrambi finiti, la  $f$  è *integrabile* su  $S$  con integrale

$$\int_S f dx = \int_S f^+ dx + \int_S f^- dx \equiv \int_S |f| dx.$$

Se uno solo dei due integrali è finito, la  $f$  è *semi-integrabile* (superiormente o inferiormente). Se entrambi gli integrali sono infiniti, l'integrale della  $f$  resta indeterminato.

- **Lo spazio  $\mathcal{L}^1(S)$**

$\mathcal{L}^1(S)$  indica la classe delle funzioni integrabili (dette anche *sommabili*) su  $S$ .

- **Linearità dell'integrale**

Per ogni  $f, g \in \mathcal{L}^1(S)$ , ed ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , risulta

$$\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}^1(S), \quad \int_S (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int_S f dx + \mu \int_S g dx.$$

$$f \leq g \quad \implies \quad \int_S f dx \leq \int_S g dx.$$

- **Additività rispetto ai domini d'integrazione**

Se  $f \in \mathcal{L}^1(S \cup T)$ , si ha:

$$\int_S f dx + \int_T f dx = \int_{S \cup T} f dx + \int_{S \cap T} f dx.$$

- **Assoluta continuità**

Se  $f \in \mathcal{L}^1(S)$ , per ogni successione  $\{T_k\}$  di sottoinsiemi (misurabili) di  $S$  si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(T_k) = 0 \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{T_k} |f| dx = 0.$$

- **Convergenza dominata**

Per ogni successione  $\{f_k\} \subset \mathcal{L}^1(S)$  tale che  $|f_k(x)| \leq G(x)$  per qualche  $G \in \mathcal{L}^1(S)$ , si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \quad \forall x \in S \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_S f_k dx = \int_S f dx.$$

- **Beppo Levi**

Se  $G(x) \leq f_1(x) \leq \dots \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq \dots$  per qualche  $G \in \mathcal{L}^1(S)$ , allora:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_S f_k dx = \int_S f dx, \quad \text{dove } f(x) = \sup_k f_k(x).$$

---

<sup>18</sup> Si noti che  $|f| = f^+ + f^-$ .

- **Fubini - Tonelli**

Dati due insiemi  $S \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^h)$ ,  $T \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$ , ed una funzione misurabile  $f(x, y) \geq 0$  su  $S \times T$ , si ha:

per quasi-ogni  $x \in S$ , la funzione  $y \mapsto f(x, y)$  è misurabile su  $T$ ,

la funzione  $F : x \mapsto \int_T f(x, y) dy$  è misurabile su  $S$ ,

$$\iint_{S \times T} f(x, y) dx dy = \int_S \left\{ \int_T f(x, y) dy \right\} dx.$$

Le stesse conclusioni valgono per ogni  $f(x, y)$  (anche se di segno variabile) che sia integrabile su  $S \times T$ , in tal caso la funzione  $F(x)$  è q.o. finita ed integrabile su  $S$ .

- **Misure astratte**

Si chiama *misura* su  $\mathbb{R}^n$  ogni funzione d'insieme  $\sigma$ -additiva  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ , dove  $\Sigma$  è una  $\sigma$ -algebra di sottinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ .

- **Delta di Dirac**

La *Delta* di Dirac è la misura, definita sulla  $\sigma$ -algebra di tutti gli insiemi  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , tale che

$$\delta(S) = 1 \quad \text{se } 0 \in S, \quad \delta(S) = 0 \quad \text{se } 0 \notin S.$$



## Capitolo 2

# Spazi $L^p$ . Prodotto di convoluzione

### 2.1 Spazi di Banach

Dato uno spazio vettoriale  $X$  sul corpo  $\mathbb{C}$ <sup>1</sup> si chiama *seminorma* su  $X$  un funzionale  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  *sub-additivo* e *positivamente omogeneo*:

$$\nu(x) \geq 0, \quad \nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y), \quad \nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x). \quad (2.1)$$

Nel caso in cui l'unico vettore  $x \in X$  con  $\nu(x) = 0$  sia quello nullo, si dice che  $\nu$  è una *norma* e si usa la notazione

$$\nu(x) = \|x\|.$$

Lo spazio  $X$  dotato della norma  $\|\cdot\|$  si chiama *spazio normato*. In ogni caso l'insieme  $N$  dei vettori  $x \in X$  con  $\nu(x) = 0$  è un sottospazio vettoriale di  $X$  e lo *spazio quoziente*  $X/N$  è uno spazio normato<sup>2</sup>.

In ogni spazio normato  $X$  è definita la distanza  $\delta(x, y) = \|x - y\|$  quindi possiamo parlare di successioni convergenti e di successioni di Cauchy<sup>3</sup>.

Un *prodotto scalare*  $(x, y)$  su  $X$  è una *forma hermitiana definita positiva*, cioè un'applicazione su  $X \times X$  a valori in  $\mathbb{C}$ , lineare nel primo argomento e anti-lineare nel secondo e tale che

$$\overline{(x, y)} = (y, x), \quad (x, x) > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Definiamo  $\|x\|^2 = (x, x)$ . Un'importante proprietà dei prodotti scalari è la *diseguaglianza di Schwarz*:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad (2.2)$$

Per provare la (2.2) notiamo che, fissati  $x, y \in X$ , risulta  $\|x\|^2 t^2 + 2\Re(x, y)t + \|y\|^2 \equiv \|x + ty\|^2 \geq 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , e quindi  $\Delta/4 \equiv \Re(x, y)^2 - \|x\| \|y\| \leq 0$ . Applicando quest'ultima a disequaglianza con  $\lambda x$  al posto di  $x$ , e facendo variare  $\lambda$  fra tutti i numeri complessi di modulo 1, si ottiene la (2.2).

Una facile conseguenza della dis. di Schwarz è che  $\|x\| \equiv \sqrt{(x, x)}$  è un funzionale sub-additivo e quindi una norma. Infatti:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

---

<sup>1</sup> Il contenuto di questo capitolo si estende con ovvie modifiche al caso degli spazi di Banach sul corpo reale, e quindi delle funzioni a valori reali.

<sup>2</sup>  $X/N$  è formato delle classi di equivalenza rispetto alla relazione  $x \sim y \iff \nu(x - y) = 0$ . Se  $x \sim y$  si ha  $\nu(x) = \nu(y)$ , quindi per ogni classe di equivalenza  $\xi = [x]$  si può definire senza ambiguità la *norma quoziente*  $\|\xi\| = \nu(x)$ .

<sup>3</sup> Una successione  $\{x_n\}$  è convergente verso un vettore  $x \in X$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$ , ed è *di Cauchy* se per ogni  $\varepsilon > 0$   $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$  per  $n, m \geq N(\varepsilon)$ .

**Definizione 7. [spazi di Banach e Hilbert]** Uno spazio normato  $X$  si dice *spazio di Banach* se è *completo*, cioè ogni sua successione di Cauchy è convergente. Se poi la norma di  $X$  deriva da un prodotto scalare si dice che  $X$  è uno *spazio di Hilbert*.

Utilizzeremo nel seguito questa caratterizzazione degli spazi di Banach:

**Proposizione 6. [completezza]** Uno spazio normato  $X$  è completo se (e solo se) le serie in  $X$  che convergono in norma sono convergenti, cioè quando per ogni  $\{y_k\} \subset X$  vale l'implicazione

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| < \infty \implies \exists z \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| z - \sum_{k=1}^n y_k \right\| = 0. \quad (2.3)$$

**Dim.** Il fatto che la (2.3) valga per ogni spazio di Banach è di facile verifica; ci limiteremo a provare che la (2.3) assicura la completezza di  $X$ .

Da ogni successione di Cauchy  $\{x_n\}$ , scegliendo  $n_1$  tale che  $\|x_h - x_k\| \leq 1/2$  per ogni  $h, k \geq n_1$ , poi  $n_2 > n_1$  tale che  $\|x_h - x_k\| \leq 1/4$  per ogni  $h, k \geq n_2$ , e così via, possiamo estrarre una sottosucc.  $\{x_{n_k}\}$  tale che  $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ . Allora la successione  $\{y_k\} = \{x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\}$  verifica la premessa della (2.3) e quindi la serie degli  $y_k$  converge verso qualche  $z \in X$ , il che è come dire che  $\{x_{n_k}\} \rightarrow z + x_{n_1}$ : abbiamo dunque trovato una sottosuccessione di  $\{x_n\}$  che converge verso qualche  $y \in X$ . Per concludere che l'intera successione  $\{x_n\}$  tende ad  $y$ , usiamo ancora l'ipotesi che  $\{x_n\}$  è di Cauchy: dato  $\varepsilon > 0$ , sia  $N \equiv N(\varepsilon)$  tale che  $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$  per  $n, m \geq N$  e  $\|x_{n_k} - y\| \leq \varepsilon$  per  $k \geq N$ ; fissato un qualche  $n_k \geq N$  si avrà allora  $\|x_n - y\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - y\| \leq 2\varepsilon$  per ogni  $n \geq N$ , e dunque  $\{x_n\} \rightarrow y$ .  $\square$

## 2.2 Spazi $L^p$

Dato  $S \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ , ricordiamo che  $\mathcal{L}^1(S)$  è lo spazio vettoriale delle funzioni (complesse) integrabili su  $S$ .

**Definizione 8. [spazi  $L^p$ ]** Sullo spazio  $\mathcal{L}^1(S)$  è definita in modo naturale la seminorma

$$\nu : f \mapsto \int_S |f(x)| dx.$$

Poichè  $\nu(f) = 0$  se e solo se  $f(x) = 0$  q.o. su  $S$ , per ottenere uno spazio normato introduciamo su  $\mathcal{L}^1(S)$  la relazione di equivalenza  $f \sim g$  se  $f(x) = g(x)$  q.o. (vedi la (1.1)) e consideriamo lo spazio quoziente

$$L^1(S) = \mathcal{L}^1(S) / \sim$$

Gli elementi di  $L^1(S)$  sono *classi* di funzioni integrabili ma saranno correntemente trattati come *funzioni*  $f, g, \dots \in \mathcal{L}^1(S)$ , con la clausola che  $f = g$  non appena risulti  $f(x) = g(x)$  q.o. La norma di  $L^1(S)$  è

$$\|f\|_{L^1(S)} = \int_S |f| dx.$$

Più in generale, per ogni numero reale  $p \geq 1$  si definisce  $L^p(S)$ , lo spazio delle (classi di) funzioni misurabili tali che  $|f|^p \in L^1(S)$ , ponendo

$$\|f\|_{L^p(S)} = \left\{ \int_S |f|^p dx \right\}^{1/p}. \quad (2.4)$$

Si definisce poi lo spazio  $L^\infty(S)$ , formato dalle (classi di) funzioni misurabili *essenzialmente limitate* su  $S$ , cioè limitate su qualche sottinsieme  $S_0 \subseteq S$  con  $m(S \setminus S_0) = 0$ , con la norma

$$\|f\|_{L^\infty(S)} = \min \left\{ M : |f(x)| \leq M \text{ q.o. su } S \right\}. \quad (2.5)$$

Come vedremo fra poco, in questo modo si ottiene uno spazio di Banach. Nel caso  $p = 2$  si trova lo spazio di Hilbert  $L^2(S)$  col prodotto scalare

$$(f.g)_{L^2(S)} = \int_S f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Per dire che i funzionali (2.4) e (2.5) sono delle norme dobbiamo verificare che sono sub-additivi (l'omogeneità è ovvia). Ciò è immediato nei casi  $p = 1, \infty$  mentre nel caso  $p = 2$  è una facile conseguenza della dis. di Schwarz. Negli altri casi la sub-additività è conseguenza di un'importante disuguaglianza:

**Proposizione 7. [dis. di Hölder]** *Supponiamo che  $p, q \in [1, +\infty]$  verificchino la relazione  $1/p + 1/q = 1$ ; per ogni  $f \in L^p(S), g \in L^q(S)$ , si ha allora:*<sup>4</sup>

$$\int_S |f g| dx \leq \|f\|_{L^p(S)} \|g\|_{L^q(S)}. \quad (2.6)$$

**Dim.** La (2.6) è ovvia nei casi  $p = 1, \infty$ . Negli altri casi essa consegue dalla

**Disuguaglianza di Young:**

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad a, b \geq 0 \quad \implies \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (2.7)$$

**Dim.** Ponendo  $a^p = x, b^q = y, 1/p = \alpha, 1/q = \beta$ , possiamo riscrivere la (2.7) nella forma

$$\alpha, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1, \quad x, y \geq 0 \quad \implies \quad x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y.$$

Quest'ultima disuguaglianza, se si escludono i casi ovvi in cui  $x = 0$  oppure  $y = 0$ , e si nota che  $\log x$  è una funzione strettamente crescente, equivale alla disuguaglianza

$$\alpha \log x + \beta \log y \leq \log(\alpha x + \beta y),$$

la quale è diretta conseguenza del fatto che  $\log x$  è una *funzione concava* sulla semiretta  $\{x > 0\}$ . □

Proviamo ora la (2.6), scrivendo per brevità  $L^p, L^q$  al posto di  $L^p(S), L^q(S)$ . Se una delle due funzioni  $f, g$  è identicamente nulla la (2.6) è banale, dunque possiamo *normalizzare* le funzioni  $f, g$ , dividendole per le loro rispettive norme, e ridurci al caso in cui  $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$ . In tal caso dalla (2.7) si ricava:

$$\int_S |f g| dx \leq \int_S \left\{ \frac{1}{p} |f|^p + \frac{1}{q} |g|^q \right\} dx = \frac{1}{p} \left\{ \|f\|_{L^p} \right\}^p + \frac{1}{q} \left\{ \|g\|_{L^q} \right\}^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Usando la disuguaglianza di Hölder, siamo ora in grado di provare la subadditività della norma  $L^p$ :

**Proposizione 8. [dis. di Minkowski]** *Per ogni coppia di funzioni  $f, g \in L^p(S), 1 \leq p \leq \infty$ , risulta*

$$\|f + g\|_{L^p(S)} \leq \|f\|_{L^p(S)} + \|g\|_{L^p(S)}. \quad (2.8)$$

**Dim.** Escludiamo i casi banali  $p = 1, \infty$ . Se  $q$  è l'esponente coniugato di  $p$ , risulta  $(p-1)q = p$  e quindi dalla dis. di Hölder otteniamo:

$$\begin{aligned} \left\{ \|f + g\|_{L^p} \right\}^p &= \int_S |f + g| |f + g|^{p-1} dx \leq \int_S |f| |f + g|^{p-1} dx + \int_S |g| |f + g|^{p-1} dx \\ &\leq \left\{ \int_S |f|^p dx \right\}^{1/p} \left\{ \int_S |f + g|^{(p-1)q} dx \right\}^{1/q} + \left\{ \int_S |g|^p dx \right\}^{1/p} \left\{ \int_S |f + g|^{(p-1)q} dx \right\}^{1/q} \\ &= \left\{ \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \right\} \left\{ \int_S |f + g|^p dx \right\}^{1/q} = \left\{ \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \right\} \left\{ \|f + g\|_{L^p} \right\}^{p-1}. \end{aligned} \quad \square$$

<sup>4</sup> In tal caso si dice che  $(p, q)$  è una coppia di *esponenti coniugati*. In particolare  $(1, \infty)$  e  $(2, 2)$  sono coppie coniugate.

Per concludere che  $L^p$  è uno spazio di Banach resta solo da provare che esso è uno spazio completo.

**Teorema 8. (completezza di  $L^p$ )** Per ogni  $p \in [1, +\infty]$  lo spazio  $L^p(S)$  è completo, quindi è un Banach.

**Dim.** Consideriamo solo il caso  $p = 1$  (gli altri casi si provano in modo analogo). Facciamo ricorso alla Prop. 6, verificando che per ogni  $\{\varphi_k\} \subset L^1(S)$  vale l'implicazione (2.3), e a questo scopo poniamo

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x), \quad \psi_n(x) = \sum_{k=1}^n |\varphi_k(x)|, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(x)|.$$

Le  $\{\psi_n(x)\}$  formano una successione non decrescente di funzioni  $\geq 0$ ; se la serie delle norme  $\|\varphi_k\|_{L^1}$  è convergente si ha poi

$$\int_S \psi_n dx \equiv \sum_{k=1}^n \|\varphi_k\|_{L^1} \leq M < \infty.$$

Ma allora, per il Teor. di Beppo Levi, il limite  $\psi(x)$  delle  $\psi_k(x)$  risulta q.o. finito ed integrabile su  $S$ ; in altre parole, per quasi-ogni  $x \in S$ , la serie numerica  $\sum \varphi_k(x)$  converge assolutamente verso qualche  $f(x) \in \mathbb{C}$  il che equivale a dire che le funzioni  $\{f_n(x)\}$  sono q.o. convergenti verso la funzione (misurabile)  $f(x)$ . Per concludere basta osservare che  $|f_n(x)| \leq \psi_n(x) \leq \psi(x)$  con  $\psi \in L^1(S)$ , quindi anche  $|f(x)| \leq \psi(x)$ , ed applicare il Teor. di Lebesgue alla successione di funzioni  $\{f_n(x) - f(x)\}$ .  $\square$

## 2.3 Convoluzione. Supporto di una funzione.

### Notazioni

$$L^p = L^p(\mathbb{R}^n), \quad \int f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

**Definizione 9. [convoluzione]** La *convoluzione* di due funzioni  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  è la funzione

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy. \quad (2.9)$$

Se vogliamo che l'integrale in (2.9) sia convergente per ogni (o almeno per quasi-ogni)  $x \in \mathbb{R}^n$ , dobbiamo fare delle ipotesi sulle due funzioni  $f, g$ . Pensando al prodotto scalare su  $L^2$ , la cosa più naturale è prendere  $f, g$  in  $L^2$ : in tal caso infatti anche la funzione  $y \mapsto f(x-y)$  sta in  $L^2$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  e quindi, grazie alla dis. di Schwarz, (2.9) definisce una funzione  $f * g \in L^\infty$ .

Meno evidente è il fatto che il prodotto di convoluzione si possa effettuare anche su  $L^1$ :

**Proposizione 9.** Se  $f, g \in L^1$  l'integrale in (2.9) converge per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , e definisce una funzione  $f * g \in L^1$ . Si ha poi:

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}. \quad (2.10)$$

**Dim.** Consideriamo la funzione  $h(x, y) = f(x-y)g(y)$ : applicando alla funzione non-negativa  $|h(x, y)|$  il Teor. di Fubini-Tonelli, e ricordando che l'integrale su  $\mathbb{R}^n$  è invariante per traslazioni, troviamo

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} |h(x, y)| dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dx \right\} dy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx \right\} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy. \end{aligned}$$

Dunque la funzione  $h(x, y) = f(x-y)g(y)$  è integrabile su  $\mathbb{R}^{2n}$ , quindi, applicando di nuovo Fubini-Tonelli, questa volta alla funzione  $h(x, y)$ , troviamo che la funzione  $(f * g)(x)$  è definita per quasi-ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Osservazione 5. [algebra di convoluzione]** Il prodotto di convoluzione è un'operazione *bilineare, associativa e commutativa* su  $L^1$  cioè

$$(\lambda f) * g = \lambda(f * g), \quad (f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g, \quad (f * g) * h = f * (g * h), \quad f * g = g * f,$$

quindi, tenuto conto della (2.10)  $(L^1, *)$  è un'algebra di Banach commutativa. Si tratta di un'algebra priva di elemento neutro.<sup>5</sup>

Se  $p > 1$  la convoluzione non può essere definita all'interno di  $L^p$  tuttavia, usando la dis. di Hölder, si può facilmente vedere che ha senso effettuare la convoluzione fra una  $f \in L^p$  ed una  $g \in L^1$ , ottenendo  $f * g \in L^p$ . Più in generale vale la

**Proposizione 10. [convoluzione negli  $L^p$ ]** Per ogni  $p, q$  con  $1/p + 1/q \geq 1$ , si ha

$$f \in L^p, g \in L^q \implies f * g \in L^r, \quad \|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \quad \text{dove} \quad \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - 1.$$

In particolare:

$$L^p * L^1 \subset L^p, \quad L^2 * L^2 \subset L^\infty, \quad \text{se } 1/p + 1/q = 1 \text{ allora } L^p * L^q \subset L^\infty.$$

**Dim.** La dimostrazione è lasciata come esercizio. □

**Definizione 10. [supporto di una funzione]** Data una funzione  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ , il *supporto* di  $f$  è il complementare in  $\Omega$  del più grande aperto  $\omega \subseteq \Omega$  sul quale  $f(x)$  è q.o. nulla, in altre parole, è l'insieme, necessariamente chiuso in  $\Omega$ , di tutti i punti  $x \in \Omega$  tali che  $f(x)$  non è q.o. nulla in alcun intorno di  $x$ .<sup>6</sup>

## Notazioni

Se  $S$  è un sottoinsieme di un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , scriveremo  $S \subset\subset \Omega$  per indicare che  $S$  è *relativamente compatto* in  $\Omega$ , cioè  $S \subseteq K \subset \Omega$  per qualche compatto  $K$ , o equivalentemente  $S$  è limitato e  $\text{dist}(S, \Omega^c) > 0$ .

## Notazioni

- $L^1_0(\Omega)$  è lo spazio delle funzioni  $f \in L^1(\Omega)$  a *supporto compatto*, cioè delle funzioni che sono q.o. nulle al di fuori di qualche compatto  $K_f \subset\subset \Omega$ .
- $\mathcal{C}^k_0(\Omega)$  e  $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$  sono gli spazi delle funzioni di classe  $\mathcal{C}^k$  e  $\mathcal{C}^\infty$  aventi supporto compatto in  $\Omega$ .

Come al solito, nel caso  $\Omega = \mathbb{R}^n$  scriveremo semplicemente  $L^1_0, \mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty$  invece di  $L^1_0(\mathbb{R}^n)$ , etc.

La convoluzione fra due funzioni  $f, g \in L^1_{\text{loc}}$  non è in generale definita, a meno che uno dei due fattori non abbia supporto compatto:

**Proposizione 11.**

$$L^1_0 * L^1_{\text{loc}} \subset L^1_{\text{loc}} \\ L^1_0 * L^1_0 \subset L^1_0, \quad \text{con } \text{supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}.$$
<sup>7</sup>

**Dim.** La dimostrazione è lasciata come esercizio. □

<sup>5</sup> Si può dimostrare che, se esistesse qualche funzione  $g \in L^1$  verificante  $f * g = f$  per ogni  $f \in L^1$ , risulterebbe  $g(x) = 0 \forall x \neq 0$ , assurdo. In un certo senso l'elemento neutro è la *Delta di Dirac*, che però non è un elemento di  $L^1$ .

<sup>6</sup> Il supporto di  $f$  non coincide sempre con l'insieme dei punti su cui  $f(x) \neq 0$ ; ad esempio per  $f(x) = x$ ,  $\text{supp}(f) = \mathbb{R}$ .

<sup>7</sup> Dati  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ , si definisce l'insieme  $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ .

La principale proprietà del prodotto di convoluzione, che ne giustifica il largo uso nello studio delle equazioni differenziali, è che la regolarità di uno solo dei due fattori  $f, g$  si trasmette al prodotto  $f * g$ :

**Teorema 9. [derivate del prodotto di convoluzione]** *Se  $f \in \mathcal{C}^k$  e  $g \in L^1_0$ , oppure  $f \in \mathcal{C}^k_0$  e  $g \in L^1_{\text{loc}}$ , si ha  $f * g \in \mathcal{C}^k$  e (per  $|\alpha| \leq k$ )*

$$\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g.$$

*Stesse conclusioni se  $f \in \mathcal{C}^k$  con  $\partial^\alpha f \in L^1$  per ogni  $|\alpha| \leq k$ , e  $g \in L^1$ .*

*In particolare, se entrambe le funzioni  $f, g$  sono regolari e una delle due è a supporto compatto, risulta:*

$$\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g = f * (\partial^\alpha g).$$

**Dim.** Sia  $u = f * g$  con  $g(x)$  funzione sommabile e a supporto compatto. Cominciamo con l'osservare che  $u(x)$  è una funzione continua non appena  $f(x)$  è continua; infatti per ogni successione  $\{x_k\} \rightarrow x$  risulta

$$\{f(x_k - y)\} \xrightarrow{k} f(x - y) \quad \text{unif. su ogni palla } B_r = \{|y| \leq r\},$$

e quindi, supponendo che  $g(y) \equiv 0$  per  $|y| \geq R$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_R} f(x_k - y) g(y) dy = \int_{B_R} f(x - y) g(y) dy = u(x).$$

Proviamo ora che, se  $f \in \mathcal{C}^1$ , anche  $u \in \mathcal{C}^1$ . Consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{u(x + t e_j) - u(x)}{t} = \int \frac{f(x + t e_j - y) - f(x - y)}{t} g(y) dy$$

dove  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  è la base hilbertiana di  $\mathbb{R}^n$ : per ogni fissato  $x \in \mathbb{R}^n$  abbiamo

$$\left\{ \frac{f(x + t e_j - y) - f(x - y)}{t} \right\} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x - y) \quad \text{unif. su ogni palla } B_r$$

e dunque  $u(x)$  è una funzione  $\mathcal{C}^1$  con derivate  $\partial_j u = \partial_j f * g$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Iterando il procedimento arriviamo alla tesi. Il caso in cui  $f \in \mathcal{C}^k_0$  e  $g \in L^1_{\text{loc}}$  si tratta in modo analogo.  $\square$

Proviamo ora un importante risultato che sarà usato nel seguito: la densità in ogni  $L^p(\Omega)$ , se  $p < \infty$ , delle funzioni continue a supporto compatto.

**Teorema 10. [densità di  $\mathcal{C}_0$  in  $L^p$ ]** *Sia  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Per ogni  $u(x) \in L^p(\Omega)$  con  $1 \leq p < \infty$  è possibile costruire una successione  $\{u_k(x)\}$  di funzioni continue a supporto compatto su  $\Omega$  in modo tale che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{L^p(\Omega)} = 0. \quad (2.11)$$

**Dim.** Dalla definizione di funzione integrabile segue che  $u(x)$  è approssimabile in  $L^p(\Omega)$  con funzioni semplici, cioè funzioni del tipo  $C_1 \chi_{S_1}(x) + \dots + C_n \chi_{S_n}(x)$ . Basterà allora provare che ogni funzione semplice, e in ultima analisi ogni funzione caratteristica di un dato ins. misurabile  $S \subset \subset \Omega$ , è approssimabile in  $L^p(\Omega)$  con funzioni continue a supporto compatto in  $\Omega$ :

**Lemma [regolarizzazione di una funz. caratteristica]** *Per ogni ins. misurabile  $S \subset \subset \Omega$  si può costruire una successione  $\{\varphi_k(x)\} \subset \mathcal{C}_0(\Omega)$  che approssima la funzione caratteristica di  $S$  nei modi seguenti:*

- i)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\chi_S - \varphi_k\|_{L^p(\Omega)} = 0 \quad \forall p < \infty,$
- ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f \cdot (\chi_S - \varphi_k)| dx = 0 \quad \forall f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega).$

**Dim.** Per la definizione di insieme misurabile possiamo trovare, per ogni  $\varepsilon > 0$ , un compatto  $K_\varepsilon$  ed un aperto  $\omega_\varepsilon$  di  $\mathbb{R}^n$  in modo tale che

$$K_\varepsilon \subseteq S \subseteq \omega_\varepsilon, \quad m(\omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Sia  $C_\varepsilon \equiv \mathbb{R}^n \setminus \omega_\varepsilon$ . Poichè  $K_\varepsilon$  e  $C_\varepsilon$  sono due chiusi disgiunti, la funzione

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\delta_{C_\varepsilon}(x)}{\delta_{K_\varepsilon}(x) + \delta_{C_\varepsilon}(x)}, \quad \text{dove} \quad \delta_S(x) = \text{dist}(x, S) \equiv \inf \{|x - y| : y \in S\},^8$$

è continua (in quanto quoziente di due funzioni continue di cui quella a denominatore non si annulla mai) e verifica

$$0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq 1, \quad \varphi_\varepsilon(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{su } K_\varepsilon \\ 0 & \text{su } C_\varepsilon \end{cases}.$$

Di conseguenza la funzione  $|\varphi_\varepsilon(x) - \chi_S(x)|$  è compresa fra 0 e 1 su  $\omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon$ , e nulla altrove, cosicchè risulta

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\varepsilon - \chi_S|^p dx = \int_{\omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon} |\varphi_\varepsilon - \chi_S|^p dx \leq m(\omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

da cui la (i). Per provare la (ii), usiamo la diseuguaglianza

$$\int_{\Omega} |f(x)(\chi_S(x) - \varphi_\varepsilon(x))| dx \leq \int_{\omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon} |f(x)| dx \equiv \alpha_\varepsilon$$

e notiamo che  $\{\alpha_\varepsilon\} \rightarrow 0$  per l'assoluta continuità dell'integrale (Teor. 3), dato che  $m(\omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ .

Questo completa la dimostrazione del Lemma e quindi del Teorema 10. □

**Osservazione 6.** Il Teor. 10 non vale nel caso  $p = \infty$ , infatti il limite uniforme di funzioni continue è necessariamente una funzione continua.

---

<sup>8</sup> Se  $S$  è chiuso questo inf è un *minimo*. Per ogni  $S$ , la funzione  $\delta_S(x)$  è continua su  $\mathbb{R}^n$ , anzi *lipschitziana*, i.e.

$$|\delta_S(x) - \delta_S(y)| \leq |x - y|.$$

Se  $S$  ed  $S'$  sono due chiusi disgiunti, si ha poi  $\delta_S(x) + \delta_{S'}(x) > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ : infatti  $\delta_S(x) = 0$  se e solo se  $x \in S$ .



## Capitolo 3

# Preliminari sulle EDP

### Notazioni

Dati  $r > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , definiamo le palle chiuse:

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}, \quad B_r = B_r(0).$$

Per ogni *multi-indice*  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  ed ogni vettore complesso  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ , poniamo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!, \quad \zeta^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_n^{\alpha_n},$$

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \circ \dots \circ \partial_n^{\alpha_n} \quad \text{dove} \quad \partial_j = \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Se  $u = u(x)$  è una funzione reale o complessa di  $n$  variabili reali, scriveremo anche

$$u_{x_j} = \partial_j u, \quad \nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u),^1 \quad \nabla^k u = (\partial^\alpha u)_{|\alpha|=k}.$$

Infine, per ogni coppia di vettori  $\zeta, w \in \mathbb{C}^n$ , poniamo

$$\zeta \cdot w = \zeta_1 w_1 + \dots + \zeta_n w_n, \quad |\zeta|^2 = \zeta \cdot \bar{\zeta} \equiv |\zeta_1|^2 + \dots + |\zeta_n|^2.$$

Dato un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ed una funzione continua  $F: \Omega \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ , dove  $N \equiv N(n, m)$  è il numero dei multi-indici  $\alpha$  di lunghezza  $|\alpha| \leq m$ , le *equazioni differenziali* su  $\Omega$  di ordine  $m$  hanno la forma

$$F(x, u(x), \nabla u(x), \dots, \nabla^m u(x)) = 0, \quad x \in \Omega.$$

dove l'*incognita*  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  è (almeno nella teoria classica) una funzione di classe  $\mathcal{C}^m$ . Ci limiteremo qui al caso delle *equazioni lineari*, cioè

$$P(x, \partial)u \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x) \tag{3.1}$$

dove le funzioni  $a_\alpha(x)$  sono i *coefficienti* ed  $f(x)$  la *sorgente* assegnata. Per lo più i coefficienti saranno *reali*. In particolare le equazioni lineari del primo e del secondo ordine hanno la forma seguente:

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_j u + b(x) u = f(x),$$

$$\sum_{i,j}^{1,n} a_{ij}(x) \partial_i \partial_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x) u = f(x).$$

---

<sup>1</sup> Di norma  $\nabla u(x)$  va inteso come un *vettore verticale*, cioè una matrice  $n \times 1$ .

Le principali equazioni in 2 variabili sono

$$\begin{aligned}
 u_x + u_y &= 0 && \text{(trasporto)} \\
 u_{xx} + u_{yy} &= 0 && \text{(Laplace)} \\
 u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{(d'Alembert)} \\
 u_t - u_{xx} &= 0 && \text{(calore)} \\
 u_t - i u_{xx} &= 0 && \text{(Schrödinger)}
 \end{aligned}$$

e queste sono le rispettive versioni multi-dimensionali:

$$\begin{aligned}
 u_{x_1} + \cdots + u_{x_n} &= 0 \\
 \Delta u \equiv u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} &= 0 \\
 u_{tt} - \Delta u &= 0 \\
 u_t - \Delta u &= 0 \\
 u_t - i \Delta u &= 0.
 \end{aligned}$$

Un posto a parte occupa l'equazione a coefficienti complessi

$$u_x + i u_y = 0. \quad \text{(Cauchy-Riemann)}$$

In genere non è possibile "trovare" esplicitamente tutte le soluzioni di un'equazione alle derivate parziali per cui, dopo avere assegnato certe condizioni aggiuntive (usualmente ispirate dal problema fisico, come le *condizioni al contorno* o le *condizioni di Cauchy*), ci si accontenta di stabilire l'eventuale esistenza ed unicità delle soluzioni, e di descriverne le principali proprietà.

Le equazione *omogenee a coefficienti costanti*

$$P(\partial_x) u \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial_x^\alpha u = 0, \quad a_\alpha \in \mathbb{C}, \quad (3.2)$$

ammettono, fra le altre, una classe di soluzioni particolarmente semplici. Infatti la *funzione esponenziale*

$$e^{\zeta \cdot x} \equiv e^{\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.3)$$

verifica

$$P(\partial_x) e^{\zeta \cdot x} = P(\zeta) e^{\zeta \cdot x}, \quad (3.4)$$

dove

$$P(\zeta) \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \zeta^\alpha,$$

pertanto  $u \equiv e^{\zeta \cdot x}$  risolve la (3.2) se (e solo se)  $\zeta$  verifica l'equazione algebrica

$$P(\zeta) \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \zeta^\alpha = 0. \quad (3.5)$$

La (3.5) viene detta *equazione caratteristica* della (3.2).

Un ruolo importante giocano le soluzioni esponenziali *limitate*, cioè del tipo  $e^{i\xi \cdot x}$  con  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , e si chiama *simbolo* della (3.2) il polinomio ottenuto eseguendo la sostituzione formale  $\partial_x^\alpha \mapsto \zeta^\alpha$ , cioè

$$p(\xi) = e^{-i\xi \cdot x} P(\partial_x) e^{i\xi \cdot x} \equiv P(i\xi).$$

Anche per un'equazione a coefficienti variabili come la (3.1) possiamo definire il simbolo <sup>2</sup>

$$P(x, \zeta) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \zeta^\alpha, \quad (3.6)$$

ma, se una radice  $\zeta \equiv \zeta(x)$  di  $P(x, \zeta) = 0$  dipende da  $x$ , la corrispondente funzione esponenziale  $e^{\zeta(x) \cdot x}$  non è una soluzione dell'eq. (3.1). <sup>3</sup>

---

<sup>2</sup> si tratta ora di un polinomio in  $\zeta \in \mathbb{C}^n$  con coefficienti dipendenti dal parametro  $x \in \mathbb{R}^n$ .

<sup>3</sup> Il simbolo di un operatore differenziale non è invariante per cambiamenti di variabili (nel *fibrato cotangente*  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ ), mentre tale risulta il *simbolo principale*

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \quad (3.7)$$



# Capitolo 4

## Equazioni del I ordine

### 4.1 Equazioni del trasporto in 2 variabili

La più semplice EDP sul piano reale  $(x, y)$  è l'equazione

$$u_y = 0.$$

Essa impone che la funzione incognita  $u \equiv u(x, y)$  sia indipendente da  $y$  e quindi le soluzioni sono tutte e sole le funzioni del tipo  $u(x, y) = U(x)$ , al variare della funzione  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Più in generale l'equazione

$$a u_x + b u_y = 0 \tag{4.1}$$

con  $a, b$  numeri reali non entrambi nulli, è fra le poche equazioni di cui si conoscono esplicitamente tutte le soluzioni  $u = u(x, y)$ . Eseguendo una riscaltura, possiamo infatti ridurci all'equazione

$$u_x + u_y = 0 \tag{4.2}$$

e (notando che  $(\partial_x - \partial_y)/2$  è la derivazione lungo la bisettrice  $\{y = x\}$ ) eseguire il cambio di variabili<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \xi = x - y \\ \eta = x + y \end{cases}, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = (\eta + \xi)/2 \\ y = (\eta - \xi)/2 \end{cases}.$$

Posto  $u(x, y) = v(\xi, \eta)$ , troviamo allora:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Dunque  $v \equiv U(\xi)$  è una funzione della sola  $\xi$  e quindi le soluzioni di (4.2) sono le funzioni del tipo

$$u(x, y) = U(x - y),$$

al variare della funzione  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La funzione  $U(\xi)$  è detta *profilo* della soluzione. Da notare che tali funzioni si mantengono costanti lungo le *rette caratteristiche*  $\{x - y = C\}$ , per ogni costante  $C \in \mathbb{R}$ .

Nel caso della (4.1),  $u(x, y) = U(bx - ay)$  e le rette caratteristiche sono  $\{bx - ay = C\}$ . Per individuare univocamente la soluzione possiamo imporre una *condizione iniziale* assegnando la  $u(x, y)$  su una retta non caratteristica, tipicamente l'asse  $x$  (se  $b \neq 0$ )<sup>2</sup>. In tal caso, assegnata una funzione  $\phi(x)$ , si richiede che

$$u(x, 0) = \phi(x).$$

---

<sup>1</sup> si tratta di una *rotazione* di  $\pi/4$ , a meno di una costante moltiplicativa.

<sup>2</sup> dunque l'equazione (4.1) è vista come un'equazione di *evoluzione* in cui la  $y$  ha il ruolo della *variabile temporale*.

Con tale condizione aggiuntiva troviamo la formula risolutiva:

$$u(x, y) = \phi\left(x - \frac{a}{b} y\right). \quad (4.3)$$

**Osservazione 7.** Se vogliamo dare un senso classico all'equazione (4.1) dobbiamo cercare soluzioni  $u(x, y)$  di classe  $\mathcal{C}^1$  e quindi assegnare un dato iniziale  $u_0(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . D'altra parte la formula (4.3) ha senso anche se  $\phi(x)$  è una funzione poco regolare; in tal caso anche la soluzione  $u(x, y)$  sarà poco regolare e per dare un senso all'equazione dovremo interpretare le derivate  $\partial_x, \partial_y$  come *derivate deboli* (vedi Cap. 10).

## 4.2 Curve caratteristiche

Data una funzione reale  $a(x, t)$ , consideriamo l'equazione

$$u_t + a(x, t) u_x = 0, \quad (4.4)$$

con la condizione iniziale

$$u(x, 0) = \phi(x). \quad (4.5)$$

Le *curve caratteristiche* della (4.4) sono tutte le possibili curve del piano  $(x, t)$  del tipo

$$x = x(t)$$

lungo le quali ogni soluzione  $u(x, t)$  si mantiene costante. Da  $u(x(t), t) \equiv C$  troviamo allora:

$$0 \equiv \frac{d}{dt} \{u(x(t), t)\} = x'(t) u_x(x(t), t) + u_t(x(t), t),$$

da cui, tenendo conto della (4.4),  $u_x(x(t), t) \cdot \{x'(t) - a(x(t), t)\} \equiv 0$ . L'*equazione delle caratteristiche* è dunque la seguente eq. differenziale ordinaria non lineare (in generale)

$$x'(t) = a(x(t), t). \quad (4.6)$$

Supponiamo che la funzione  $a(x, t)$  sia regolare, ad esempio di classe  $\mathcal{C}^1$ . Per trovare la soluzione  $u(x, t)$  di (4.4)–(4.5) procediamo in questo modo: fissato il punto  $X = (\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^2$  in cui vogliamo calcolare la soluzione, risolviamo l'equazione (4.6) col dato iniziale  $x(\bar{t}) = \bar{x}$  determinando la (necessariamente unica) curva caratteristica passante per  $X$ . Se tale curva interseca l'asse delle  $x$  in qualche (necessariamente unico) punto  $X' = (\xi, 0)$  con  $\xi = \xi(\bar{x}, \bar{t})$ ,<sup>3</sup> si ha  $u(X') = u(X)$ , quindi scrivendo  $(x, t)$  al posto di  $(\bar{x}, \bar{t})$  troviamo

$$u(x, t) = u(\xi(x, t), 0) \equiv \phi(\xi(x, t)).$$

Se la (4.6) ha qualche soluzione *non globale*, può esservi qualche curva caratteristica che non tocca l'asse delle  $x$ , in altre parole può succedere che la regione spazzata dalle curve caratteristiche che partono dall'asse delle  $x$  sia un *sottoinsieme proprio*  $D \subset \mathbb{R}^2$ : in tal caso la soluzione  $u(x, t)$  resta definita solo in  $D$ .

---

<sup>3</sup> Questo caso si verifica in particolare quando la funzione  $a(x, t)$  ha una crescita sub-lineare per  $|x| \rightarrow \infty$ , cosicchè le soluzioni dell'equazione delle caratteristiche sono globali. Per determinare  $\xi \equiv \xi(x, t)$ , indicando con  $x = \varphi(t; C)$  la famiglia delle curve caratteristiche al variare della costante  $C$ , dobbiamo cercare di eliminare  $C$  dal sistema

$$\begin{cases} x = \varphi(t; C), \\ \xi = \varphi(0; C). \end{cases}$$

## Esempi

1.  $\mathbf{u}_t + \mathbf{x} \mathbf{u}_x = \mathbf{0}$ .

L'eq. delle caratteristiche è

$$x'(t) = x(t), \quad (4.7)$$

le cui soluzioni sono le curve

$$x = C e^t, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tutte queste curve attraversano l'asse  $x$ , in accordo col fatto che le soluzioni della (4.7) sono globali; precisamente la curva  $x = C e^t$  incontra tale asse nel punto di ascissa  $\xi = C$ . D'altra parte la caratteristica passante per il punto  $(\bar{x}, \bar{t})$  si ottiene per  $C = \bar{x} e^{-\bar{t}}$ , dunque la soluzione col dato iniziale  $u_0(x)$  è la funzione

$$u(x, t) = u_0(x e^{-t}).$$

2.  $\mathbf{u}_t + \mathbf{x}^2 \mathbf{u}_x = \mathbf{0}$ .

L'eq. delle caratteristiche è

$$x'(t) = x^2(t).$$

Una soluzione è la funzione costante  $x(s) \equiv 0$ . Per  $x \neq 0$  si ha invece  $(1/x)' = -x'/x^2 = -1$ , cioè

$$\frac{1}{x} + t = C. \quad (4.8)$$

Per  $C = 0$  la curva caratteristica è costituita dai due archi dell'iperbole equilatera  $\Gamma = \{xt + 1 = 0\}$ . Se togliamo  $\Gamma$  dal piano  $\mathbb{R}^2$  otteniamo tre aperti connessi:

$$D = \{(x, t) : xt + 1 > 0\}, \quad \Omega_1 = \{(x, t) : xt + 1 < 0, x > 0\}, \quad \Omega_2 = \{(x, t) : xt + 1 < 0, x < 0\}.$$

Ora è facile verificare che le caratteristiche che attraversano l'asse delle  $x$  coprono la regione  $D$ , mentre le altre caratteristiche restano confinate in  $\Omega_1$  oppure in  $\Omega_2$  e quindi non toccano l'asse delle  $x$ .

Per trovare la soluzione col dato iniziale  $u(x, 0) = \phi(x)$ , fissato  $(\bar{x}, \bar{t}) \in D$ , confrontiamo le espressioni

$$\frac{1}{\bar{x}} + \bar{t} = C, \quad \frac{1}{\xi} + 0 = C,$$

per ottenere  $\xi = 1/C = (1/\bar{x} + \bar{t})^{-1} = \bar{x}(1 + \bar{x}\bar{t})^{-1}$ . La soluzione cercata sarà dunque

$$u(x, t) = \phi\left(\frac{x}{1 + xt}\right), \quad xt > -1.$$

Si noti che  $u(0, t) \equiv \phi(0)$ , in accordo col fatto che l'asse delle  $t$  è una delle curve caratteristiche.

## 4.3 Equazioni non omogenee

Nel caso di un'equazione con sorgente diversa da zero, cioè

$$u_t + a(x, t) u_x = f(x, t), \quad (4.9)$$

non possiamo sperare di trovare delle curve lungo le quali la soluzione resta costante. Consideriamo allora le curve caratteristiche dell'equazione omogenea associata alla (4.9), cioè le curve  $x = x(t)$  che verificano  $x'(t) = a(x(t), t)$ , e vediamo come si comportano le soluzioni della (4.9) lungo ciascuna di queste curve.

Se indichiamo con  $w(t) = u(x(t), t)$  la restrizione della funzione  $u$  lungo la caratteristica  $x = x(t)$ , abbiamo:

$$w'(t) = x'(t)u_x(x(t), t) + u_t(x(t), t) = u_x(x(t), t)\{x'(t) - a(x(t), t)\} + f(x(t), t) = f(x(t), t)$$

da cui, integrando fra 0 e  $t$ ,

$$w(t) = w(0) + \int_0^t f(x(s), s) ds.$$

Dunque la formula risolutiva per la soluzione con dato iniziale  $\phi(x)$  è

$$u(x, t) = \phi(\xi(x, t)) + \int_0^t f(x(s), s) ds,$$

dove  $x = x(t)$  è la curva caratteristica dell'eq. omogenea associata alla (4.9) passante per il punto  $(\bar{x}, \bar{t})$ , e  $\xi(\bar{x}, \bar{t})$  è l'ascissa del punto d'intersezione di tale curva con l'asse delle  $x$ .

Ad esempio, per l'equazione  $u_t + a u_x = f(x, t)$ , con  $a$  costante reale, risulta  $x(t) = \bar{x} + a(t - \bar{t})$  e quindi

$$u(x, t) = \phi(x - at) + \int_0^t f(x - a(t - s), s) ds. \quad (4.10)$$

Con un ragionamento simile si tratta il caso dell'*equazione completa*

$$u_t + a(x, t)u_x + b(x, t)u = f(x, t).$$

Anche questa volta le caratteristiche sono relative alla *parte principale* dell'equazione, e la soluzione ristretta ad una caratteristica, cioè la funzione  $y(t) = u(x(t), t)$ , verifica l'equazione differenziale ordinaria

$$y'(t) + b(x(t), t)y(t) = f(x(t), t).$$

## 4.4 Trasporto in $n + 1$ variabili

Le equazioni del trasporto su  $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$  hanno la forma

$$u_t + a(x, t) \cdot \nabla u \equiv u_t + \sum_{j=1}^n a_j(x, t) u_{x_j} = 0 \quad (4.11)$$

dove  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Le caratteristiche sono le curve  $x = x(t)$  in  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$  su cui le soluzioni restano costanti, cioè  $u(x(t), t) \equiv C$ . Derivando si trova il *sistema* di  $n$  eq. ordinarie

$$\dot{x}(t) = a(x(t), t).$$

Per trovare la soluzione della (4.11) sotto la condizione  $u(x, 0) = \phi(x)$ , si procede come nel caso  $n = 1$ : se  $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  è la regione coperta dalle curve caratteristiche che toccano l'iperpiano iniziale  $M \equiv \{t = 0\}$ , la soluzione in un punto  $(x, t) \in D$  è data da

$$u(x, t) = \phi(\xi(x, t))$$

dove  $(\xi(x, t), 0)$  è il punto d'intersezione di  $M$  con la caratteristica passante per  $(x, t)$ .

Nel caso dei coefficienti costanti,  $u_t + a \cdot \nabla u = 0$ , le caratteristiche sono le rette di  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$  del tipo

$$x = c + ta,$$

al variare del vettore  $c \in \mathbb{R}^n$ , e la soluzione del problema di Cauchy è

$$u(x, t) = \phi(x - ta).$$

## 4.5 Equazione di Cauchy - Riemann

L'equazione a coefficienti complessi

$$u_x + i u_y = 0 \quad (4.12)$$

è solo formalmente simile all'equazione del trasporto. Chiaramente la (4.12) non può avere *soluzioni reali*, tranne quelle costanti. Se cerchiamo la soluzione  $u(x, y) \in \mathbb{C}$  che vale  $u_0(x)$  sulla retta  $\{y = 0\}$ , dove  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione assegnata, procedendo in modo formale, troviamo

$$u(x, y) = \phi(x + iy).$$

Purtroppo questa espressione non ha senso poichè il dato iniziale  $\phi(x)$  è definito solo sull'asse reale. Per darvi un senso dovremmo riuscire ad estendere la funzione  $\phi(x)$  al piano complesso  $\mathbb{C}_z$ , dove  $z = x + iy \sim (x, y)$ , imponendo che l'estensione sia una funzione *olomorfa*<sup>4</sup> in qualche intorno  $D \subseteq \mathbb{C}$  dell'asse reale  $\{y = 0\}$ . Del resto, dalla teoria delle funzioni olomorfe sappiamo che le  $u(x, y)$  verificanti la (4.12) in un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  sono proprio le funzioni olomorfe rispetto alla variabile complessa  $z = x + iy$ .

Se vogliamo restare nell'ambito delle funzioni reali, possiamo scrivere  $u = v + iw$ , con  $v, w \in \mathbb{R}$ , e trasformare l'equazione complessa (4.12) nel sistema reale

$$\begin{cases} v_x = w_y \\ w_x = -v_y \end{cases}. \quad (4.13)$$

Le funzioni olomorfe su tutto il piano complesso ammettono uno sviluppo in serie di potenze con centro in un (arbitrario) punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  e raggio di convergenza infinito. Esse sono dette *funzioni intere*. Tali sono ad esempio le funzioni:

$$P(z), e^z, \sin z, \cos z, e^{P(z)}, e^{e^z}, \dots, \quad \text{dove } P(z) \text{ è un polinomio.}$$

**Osservazione 8.** Accanto alla (4.12) possiamo considerare l'equazione

$$u_x - i u_y = 0, \quad (4.14)$$

le cui soluzioni sono dette *funzioni anti-olomorfe*. Il loro prototipo è  $u(z) = \bar{z}$ . Si noti che  $u(z)$  è anti-olomorfa se e solo se  $u(\bar{z})$  è olomorfa, o anche se e solo se  $\Im u(z) + i \Re u(z)$  è olomorfa.

---

<sup>4</sup> Se  $D$  è un dominio di  $\mathbb{C}$ , una funzione  $u : D \rightarrow \mathbb{C}$  è *olomorfa* se per ogni  $z \in D$  esiste la *derivata complessa*

$$u'(z) \equiv \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{u(z + \zeta) - u(z)}{\zeta} \in \mathbb{C}.$$



## Capitolo 5

# Equazioni del II ordine in due variabili

Le equazioni del second'ordine in due variabili indipendenti possono essere raggruppate in tre classi notevoli: le eq. *iperboliche*, le *paraboliche* e le *ellittiche*. I prototipi di queste classi sono rispettivamente l'equazione della corda vibrante (d'Alembert), l'equazione del calore (Fourier) e l'equazione di Laplace.

### 5.1 Equazione della corda vibrante

Storicamente la prima equazione alle derivate parziali è forse l'eq. di d'Alembert della *corda vibrante* (1760)

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{5.1}$$

che descrive le oscillazioni trasversali di una corda elastica tesa. La funzione incognita  $u(x, t)$  rappresenta lo spostamento dalla configurazione iniziale, all'istante  $t$ , del punto della corda di coordinata  $x$ .<sup>1</sup> Possiamo considerare il caso della corda di lunghezza infinita senza estremi, oppure quello della corda fissata ad uno o entrambi gli estremi. Ci occuperemo qui del primo caso.

Per trovare qualche soluzione elementare della (5.1) possiamo ricorrere al *metodo delle variabili separate*, cercando soluzioni reali della forma  $u(x, y) = A(x)B(t)$ . Dalla (5.1) otteniamo, per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$A''(x) = \lambda A(x), \quad B''(t) = \lambda B(t),$$

da cui, posto  $\lambda = \pm \mu^2$ , ricaviamo le seguenti famiglie di soluzioni, al variare di  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{\mu x} e^{\mu t}, \quad e^{\mu x} e^{-\mu t}, \quad \cos(\mu x) \cos(\mu t), \quad \cos(\mu x) \sin(\mu t), \quad \sin(\mu x) \cos(\mu t), \quad \sin(\mu x) \sin(\mu t).$$

Ovviamente non tutte le soluzioni dell'equazione sono combinazioni lineari di funzioni di questo tipo. Per trovare tutte le soluzioni conviene effettuare il cambio di variabili

$$\begin{cases} x - t = \xi \\ x + t = \eta \end{cases}, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \partial_\xi = \partial_x - \partial_t \\ \partial_\eta = \partial_x + \partial_t \end{cases},$$

tramite il quale la (5.1) diventa

$$\partial_\xi (\partial_\eta u) = 0.$$

Ma allora  $\partial_\eta u = v(\eta)$  per qualche funzione  $v$  e quindi, integrando in  $\eta$ ,  $u(\xi, \eta) = U(\xi) + V(\eta)$  cioè

$$u(x, t) = U(x - t) + V(x + t). \tag{5.2}$$

---

<sup>1</sup> La (5.1) descrive anche la propagazione delle onde sonore in un mezzo unidimensionale.

Dato che le soluzioni dipendono da una coppia di funzioni  $(U, V)$ , per individuarle univocamente dovremo assegnare due *condizioni iniziali* su una curva trasversale alle due famiglie di *rette caratteristiche*  $\{x+y=C\}$  e  $\{x-y=C\}$ . del resto, questo è in accordo col fatto che l'equazione considerata è del secondo ordine.

Il *Problema di Cauchy* consiste nel cercare le soluzioni  $u(x, t)$  della (5.1) che verificano le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \quad (5.3)$$

I dati iniziali  $u_0(x)$  e  $u_1(x)$  rappresentano lo spostamento e la velocità iniziali del punto di ascissa  $x$ .

Le funzioni  $\{U, V\}$  nella (5.2) si ricavano facilmente a partire dalla coppia dei dati iniziali. Si ha infatti:

$$\begin{cases} u_0(x) = U(x) + V(x) \\ u_1(x) = V'(x) - U'(x) \end{cases} \implies \begin{cases} u'_0 = U' + V' \\ u_1 = V' - U' \end{cases} \implies \begin{cases} U' = \frac{1}{2}(u'_0 - u_1) \\ V' = \frac{1}{2}(u'_0 + u_1) \end{cases}$$

da cui, integrando,

$$U(x) = \frac{1}{2} \left\{ u_0(x) - \int_0^x u_1(y) dy \right\} + C_1, \quad V(x) = \frac{1}{2} \left\{ u_0(x) + \int_0^x u_1(y) dy \right\} + C_2.$$

Ritornando alla (5.2), e notando che  $C_1 + C_2 = 0$  in quanto  $U + V = u_0$ , otteniamo allora

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ u_0(x-t) - \int_0^{x-t} u_1(y) dy \right\} + \frac{1}{2} \left\{ u_0(x+t) + \int_0^{x+t} u_1(y) dy \right\}$$

e cioè la classica *Formula di d'Alembert*:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ u_0(x-t) + u_0(x+t) \right\} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) dy. \quad (5.4)$$

In altre parole la soluzione nel punto  $(x, t)$  è uguale alla *media aritmetica* dei valori del primo dato iniziale agli estremi dell'intervallo  $I_t(x) = [x-t, x+t]$  sommata alla *media integrale* su  $I_t(x)$  del secondo dato iniziale, moltiplicata per  $t$ .

Per l'equazione di tipo più generale

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (c > 0) \quad (5.5)$$

la soluzione è invece

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ u_0(x-ct) + u_0(x+ct) \right\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy. \quad (5.6)$$

### 5.1.1 Velocità finita di propagazione

Dalla formula (5.6) segue che, se i dati iniziali del Problema (5.5)–(5.3) sono nulli su un qualche intervallo  $I_R(x_0) = [x_0 - R, x_0 + R]$ , allora la soluzione  $u(x, t)$  resta nulla sul dominio

$$\Gamma^-(V, 1/c) = \left\{ (x, t) : 0 \leq t \leq R/c, \quad |x - x_0| \leq R - ct \right\},$$

cioè sul cono (pieno) di base  $I_R(x_0)$  e vertice  $V = (x_0, R/c)$ , quindi di pendenza  $1/c$ . Nel caso particolare in cui  $u_1 = 0$  si giunge alla stessa conclusione non appena  $u_0(x)$  è nulla agli estremi dell'intervallo  $I_R(x_0)$ .

Di conseguenza, se i dati iniziali hanno supporto contenuto in un intervallo  $I_\varepsilon(x_0)$  di raggio  $\varepsilon$ , il supporto della soluzione sarà contenuto in un  $\varepsilon$ -intorno del cono (rivolto verso l'alto)  $\Gamma^-(V_0, 1/c)$ , di pendenza  $1/c$  e vertice  $V = (x_0, 0)$ , e in un  $\varepsilon$ -intorno delle due semirette che delimitano tale cono nel caso in cui  $u_1 = 0$ .

Come vedremo più avanti, è possibile interpretare l'eq (5.1) nel senso delle distribuzioni. In questo ambito più generale ha senso assegnare le condizioni iniziali

$$u_0(x) = \delta(x - x_0), \quad u_1(x) = 0,$$

dove  $\delta(x - x_0)$  è la Delta di Dirac nel punto  $x_0$ . Dalla formula di d'Alembert segue allora che la soluzione al tempo  $t > 0$  è la semisomma di due delte di Dirac concentrate negli estremi dell'intervallo  $I_t(x_0)$ , cioè

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \delta(x - (x_0 - ct)) + \delta(x - (x_0 + ct)) \right\}.$$

Dunque  $u(x, t)$  è una *misura* concentrata sul *bordo* del cono  $\Gamma^-(V_0, 1/c)$ . Nel caso in cui  $u_1 \neq 0$ , il supporto della soluzione si distribuisce all'interno del cono; ad esempio se  $u_0 = 0$  e  $u_1 = \delta(x - x_0)$ ,  $u(x, t)$  è la funzione caratteristica del cono  $\Gamma^-(V_0, 1/c)$ .

Il significato fisico è il seguente: se la corda elastica viene perturbata all'istante iniziale in un dato punto  $x_0$ , la perturbazione si propaga a destra e a sinistra di  $x_0$  con velocità  $c$ , in particolare in un dato punto  $\bar{x} \neq x_0$  la corda resta imperturbata sino all'istante  $T = |\bar{x} - x_0|/c$ . Se poi alla corda non si imprime alcuna velocità iniziale (cioè  $u_1 = 0$ ), la perturbazione nel punto  $\bar{x}$  cessa negli istanti successivi a  $T$ .

### 5.1.2 Coefficienti variabili

Se nell'eq. (5.5) introduciamo un coefficiente variabile  $c = c(x, t)$ , per descrivere la propagazione ondosa in un mezzo unidimensionale non omogeneo e di densità variabile col tempo, la formula di d'Alembert dev'essere modificata. Ora però non esiste una formula esplicita della soluzione, neppure nei seguenti casi particolari.

$$u_{tt} - c(x) u_{xx} = 0, \quad c(x) > 0,$$

$$u_{tt} - c(t) u_{xx} = 0, \quad c(t) > 0.$$

Nel primo caso possiamo cercare soluzioni particolari del tipo  $u(x, t) = v(x) w(t)$ , ottenendo

$$w''(t) v(x) = c(x) v''(x) w(t),$$

e quindi, separando le variabili, siamo ricondotti a risolvere due equazioni ordinarie:

$$w''(t) = \lambda w(t), \quad v''(x) = \frac{\lambda}{c(x)} v(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nel secondo caso, dato che i coefficienti non dipendono da  $x$ , possiamo ricavare qualche informazione sulle soluzioni effettuando la *trasformata di Fourier* in  $x$ , cioè definendo

$$w(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x, t) dx;$$

per ogni valore del parametro reale  $\xi$  otterremo allora l'equazione differenziale ordinaria nella variabile  $t$

$$w''(\xi, t) + \xi^2 c(t) w(\xi, t) = 0.$$

## 5.2 Equazione unidimensionale del calore

L'equazione di Fourier in una dimensione spaziale,

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad (5.7)$$

descrive la diffusione del calore in un corpo unidimensionale a partire dalla distribuzione iniziale

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (5.8)$$

A differenza dell'equazione di D'Alembert, che è invariante per la trasformazione  $t \mapsto -t$ , la variabile  $t$  è ora sempre positiva. Chiameremo *soluzione fondamentale* della (5.7) una funzione che risolva il Problema di Cauchy con dato iniziale la Delta di Dirac, cioè:

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad (5.9)$$

$$u(x, 0) = \delta(x). \quad (5.10)$$

dove la condizione iniziale va intesa in un senso da precisarsi. Come vedremo, la soluzione  $u(x, t)$  risulta essere una funzione regolare sul semipiano aperto  $\{t > 0\}$  che diventa singolare per  $t$  tendente a 0.

A partire da una soluzione fondamentale, attraverso una procedura di convoluzione, potremo trovare la soluzione del Problema di Cauchy (5.7)–(5.8) con un arbitrario dato iniziale  $u_0(x)$ . Cerchiamo dunque una soluzione fondamentale dell'operatore del calore  $\mathcal{H} = \partial_t - \partial_x^2$ . A questo scopo osserviamo che l'equazione di Fourier è invariante per omotetie di fattore  $\lambda$  nella variabile  $x$  e di fattore  $\lambda^2$  nella  $t$ , cosicché se  $u(x, t)$  è una soluzione di  $\mathcal{H}u = 0$  nel semipiano  $t > 0$ , ogni funzione del tipo

$$u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$$

è una soluzione. Ciò suggerisce di cercare soluzioni *a variabili separate*, cioè del tipo

$$u(x, t) = \psi(t)U(y) \quad \text{con} \quad y = x^2/t.$$

Calcoliamo le derivate della  $u$ :

$$u_t = \psi'(t) \cdot U\left(x^2/t\right) - \psi(t) \cdot U'\left(x^2/t\right) x^2/t^2$$

$$u_x = \psi(t) \cdot U'\left(x^2/t\right) 2x/t$$

$$u_{xx} = \psi(t) \cdot U''\left(x^2/t\right) 4x^2/t^2 + \psi(t) \cdot U'\left(x^2/t\right) 2/t.$$

Tornando all'equazione (5.7), troviamo

$$\psi'(t)U(y) = \frac{\psi(t)}{t} \cdot \left\{ U'(y)y + 4U''(y)y + 2U'(y) \right\}.$$

Per semplificare questa espressione scegliamo la  $U$  in modo che  $U'(y) + 4U''(y) = 0$ , cioè  $U(y) = e^{-y/4}$ . Otteniamo allora l'equazione di Clairot  $\psi'(t) = -\psi(t)/2t$ , le cui soluzioni sono  $\psi(t) = C/\sqrt{t}$ , con  $C \in \mathbb{R}$ .

In conclusione abbiamo trovato, per l'equazione del calore, le soluzioni

$$u(x, t) = \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t}.$$

Si tratta di funzioni analitiche su  $t > 0$ , che diventano singolari per  $t \rightarrow 0^+$  nel punto  $x = 0$ . Si ha poi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0, \quad \forall x \neq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/4t} \frac{dx}{\sqrt{t}} = C\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/2} ds = C\sqrt{4\pi}, \quad \forall t > 0. \quad (5.11)$$

Vogliamo ora determinare la costante  $C$  in modo da soddisfare la condizione iniziale  $u(x, 0) = \delta(x)$ . Poichè la Delta di Dirac è una misura, è naturale interpretare tale condizione come

$$\{u(x, t)\} \rightarrow \delta(x) \quad \text{per } t \rightarrow 0^+ \quad \text{nel senso delle misure.}^2 \quad (5.12)$$

In particolare dovrà aversi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx \equiv 1,$$

dunque la giusta costante nella (5.11) è  $C = 1/\sqrt{4\pi}$ , e la soluzione del Problema (5.9)–(5.10) è

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}. \quad (5.13)$$

## 5.3 Equazione di Laplace sul piano

### 5.3.1 Funzioni armoniche e funzioni olomorfe

Le *funzioni armoniche* in un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  sono le funz. reali  $u(x, y)$  che risolvono l'equazione di Laplace

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (5.14)$$

Diversamente dall'equazione delle onde non possiamo esplicitare tutte le soluzioni della (5.14), possiamo tuttavia trovare varie soluzioni particolarmente semplici, quali

$$\begin{aligned} e^{\mu x} \cos(\mu y), \quad e^{\mu x} \sin(\mu y), \quad e^{\mu y} \cos(\mu x), \quad e^{\mu y} \sin(\mu x) \quad (\mu \in \mathbb{R}), \\ x, \quad y, \quad x^2 - y^2, \quad 2xy, \quad x^3 - 3xy^2, \quad 3x^2y - y^3. \end{aligned}$$

Si noti che ognuna di queste funzioni è la parte reale o immaginaria di qualche funz. olomorfa, precisamente:

$$e^{\mu z}, \quad e^{-i\mu z}, \quad z, \quad z^2, \quad z^3.$$

Vale in realtà un risultato di tipo generale:

**Proposizione 12.** *Le funzioni armoniche  $u(x, y)$  su un aperto convesso  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  sono tutte e sole le parti reali (o immaginarie) di una qualche funzione olomorfa  $f(z)$ .*<sup>3</sup>

**Dim.** La funzione  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  è olomorfa se e solo se le funzioni reali  $u, v$  verificano il sistema di Cauchy-Riemann (4.13). Di conseguenza

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{yx} - u_{xy} = 0, \quad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -v_{yx} + v_{xy} = 0.$$

Viceversa, se  $u(x, y)$  è una funz. armonica possiamo trovare un'altra funz. armonica  $v(x, y)$ , detta la *coniugata* della  $u$ , in modo che siano soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann e quindi la funzione  $f = u + i v$  risulti olomorfa. Per trovare  $v$  ricorriamo alla teoria delle *forme differenziali*<sup>4</sup> cercando una *primitiva*  $v(x, y)$  della forma differenziale  $\alpha = -u_y(x, y) dx + u_x(x, y) dy$ . Ora si verifica subito che  $\alpha$  è una *forma chiusa*, quindi l'esistenza di tale primitiva è assicurata dal fatto che  $\Omega$  è un insieme convesso.  $\square$

<sup>2</sup> Se  $\{\mu_k\}$  e  $\mu$  sono misure su una  $\sigma$ -algebra  $\Sigma$  di  $\mathbb{R}^n$ , si dice che  $\{\mu_k\} \rightarrow \mu$  ( $k \rightarrow \infty$ ) se  $\{\mu_k(S)\} \rightarrow \mu(S)$ ,  $\forall S \in \Sigma$ . Nel caso in cui  $\mu_k \geq 0$  e  $\mu_k(\mathbb{R}^n) < \infty$ , questo equivale a dire che, per ogni funzione  $\varphi(x)$  continua e limitata su  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu.$$

<sup>3</sup> Data una funzione olomorfa  $f = u + i v$ , la parte immaginaria di  $f$  è la parte reale della funzione olomorfa  $-if$ .

<sup>4</sup> Una forma differenziale  $\alpha = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  su  $\Omega$  è *esatta* se esiste una funz.  $f(x, y)$  tale che  $df = f_x dx + f_y dy = \alpha$  (nel qual caso si dice che  $f$  è una *primitiva* di  $\alpha$ ), mentre  $\alpha$  è una *forma chiusa* se  $d\alpha \equiv -A_y + B_x = 0$ . Le forme esatte sono sempre chiuse e quando  $\Omega$  è convesso vale anche il viceversa.

### 5.3.2 Armoniche radiali

Dato che l'operatore di Laplace sul piano è invariante per rotazioni è naturale cercare funzioni armoniche *di tipo radiale*, cioè dipendenti solo dal raggio  $r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Cerchiamo dunque soluzioni del tipo

$$u(x, y) = U(r), \quad \text{dove } U : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}.$$

Poniamoci sull'aperto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Poichè  $(r_x, r_y) = (x/r, y/r)$ , per ogni funzione radiale  $u$  con  $U \in \mathcal{C}^2$  si ha

$$\begin{aligned} u_x &= U'(r) \frac{x}{r}, & u_y &= U'(r) \frac{y}{r}, \\ u_{xx} &= U''(r) \frac{x^2}{r^2} + U'(r) \left\{ \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right\}, & u_{yy} &= U''(r) \frac{y^2}{r^2} + U'(r) \left\{ \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right\}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\Delta u = U''(r) + \frac{1}{r} U'(r) \tag{5.15}$$

Per avere  $\Delta u = 0$  dovrà aversi  $U'' + U'/r = 0$ , da cui  $U'(r) = C/r$ , e quindi

$$U(r) = C \log r + C'.$$

Ne risulta in particolare che le sole funzioni armoniche radiali su tutto il piano sono le costanti.<sup>5</sup>

Con un calcolo un po' più laborioso, troviamo l'espressione del Laplaciano in *coordinate polari*. Scrivendo

$$u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta) \equiv U(r, \theta),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} U_r &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, & U_\theta &= u_x(-r \sin \theta) + u_y r \cos \theta, \\ U_{rr} &= u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \cos \theta \sin \theta + u_{yy} \sin^2 \theta, \\ U_{\theta\theta} &= u_{xx} r^2 \sin^2 \theta - 2u_{xy} r^2 \cos \theta \sin \theta + u_{yy} r^2 \cos^2 \theta - (u_x r \cos \theta + u_y r \sin \theta), \end{aligned}$$

e quindi

$$U_{rr} + r^{-2} U_{\theta\theta} = u_{xx} + u_{yy} - r^{-1} U_r.$$

In conclusione:

$$\Delta u = U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta}. \tag{5.16}$$

### 5.3.3 Soluzione fondamentale in $\mathbb{R}^2$

Abbiamo visto che le funzioni del tipo  $u(x, y) = C \log r$  sono, a meno di costanti additive, le sole armoniche radiali su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Vale inoltre questa importante proprietà: scegliendo  $C = 2\pi$ , risulta

$$\Delta \left( \frac{1}{2\pi} \log r \right) = \delta(x, y). \tag{5.17}$$

**Osservazione 9.** Le soluzioni in  $\mathbb{R}^n$  dell'equazione  $\Delta u = \delta$  si dicono *soluzioni fondamentali*. Come vedremo più avanti, a partire dalle soluzioni fondamentali con un *procedimento di convoluzione*, si possono trovare le soluzioni dell'equazione di Poisson  $\Delta u = f(x)$  per un'arbitraria sorgente  $f(x)$ .

<sup>5</sup> La funzione  $\log r$  è armonica sul dominio  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Essa è la parte reale della funz.  $\log z = \log |z| + i \text{Arg}(z)$  che è olomorfa sul piano complesso privato della semiretta  $\{z : \Im z = 0, \Re z \leq 0\}$  ma non è olomorfa su tutto  $\Omega$ . Dunque non esistono funzioni olomorfe su  $\Omega$  con parte reale uguale a  $\log r$ . Ciò non contrasta colla Prop. 12 dato che  $\Omega$  non è convesso.

L'eguaglianza (5.17) va intesa *in senso debole* (o *senso delle distribuzioni*) cioè, detto  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  lo spazio delle funzioni di classe  $C^\infty$  a supporto compatto su  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \Delta\left(\frac{1}{2\pi} \log r\right) \cdot \varphi(x, y) dx dy = \langle \delta, \varphi \rangle \equiv \varphi(0, 0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (5.18)$$

Ma anche quest'ultima formula necessita di qualche spiegazione, infatti  $\log r$  non è un funzione regolare su  $\mathbb{R}^2$ , per cui  $\Delta(\log r)$  non è definita come funzione: per dare un senso alla (5.18) dobbiamo ricorrere alle *derivate distribuzionali* (che saranno trattate approfonditamente più avanti) e cioè "scaricare" il laplaciano dalla distribuzione  $\log r$  sulla funzione test  $\varphi(x, y)$ . Precisamente dimostreremo il seguente fatto:

**Teorema 11. [soluz. fondamentale del Laplaciano]** Per ogni funzione  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \log r \cdot \Delta\varphi(x, y) dx dy = \varphi(0, 0). \quad (5.19)$$

**Dim.**<sup>6</sup> Osserviamo anzitutto che la (5.19) ha senso: infatti  $\log r(x, y)$  è integrabile su ogni palla  $B_R \subset \mathbb{R}^2$  di centro l'origine e quindi sta in  $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ , e l'integrale nella (5.19) si svolge sul supporto di  $\varphi$  che è un compatto di  $\mathbb{R}^2$ . Notiamo poi che per ogni  $f \in L^1(B_R)$  risulta

$$\int_{B_R} f dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C(\varepsilon, R)} f dx$$

dove  $C(\varepsilon, R) = B_R \setminus B_\varepsilon$  è la *corona circolare* di raggi  $\varepsilon$  ed  $R$ . Dunque, la (5.19) equivale a dire che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{C(\varepsilon, R)} \frac{1}{2\pi} \log r \cdot \Delta\varphi(x, y) dx dy = \varphi(0, 0), \quad (5.20)$$

per  $R$  abbastanza grande da avere  $B_R \supset \text{supp}(\varphi)$ . Per provare la (5.20) ricorriamo al seguente

**Lemma.** Per ogni coppia di funzioni,  $u(x, y) \equiv U(r, \theta)$ ,  $\varphi(x, y) \equiv \Phi(r, \theta)$ , di classe  $C^2$  su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , risulta

$$\iint_{C(\varepsilon, R)} (u \Delta\varphi - \varphi \Delta u) dx dy = \left[ \int_0^{2\pi} r (U \Phi_r - \Phi U_r)(r, \theta) d\theta \right]_{r=\varepsilon}^{r=R}. \quad (5.21)$$

**Dim.** Consideriamo la funzione

$$u \Delta\varphi - \varphi \Delta u = f(x, y) \equiv F(r, \theta).$$

Dall'espressione (5.16) del laplaciano in coordinate polari ricaviamo:

$$\begin{aligned} F(r, \theta) &= (U \Phi_{rr} - \Phi U_{rr}) + r^{-1} (U \Phi_r - \Phi U_r) + r^{-2} (U \Phi_{\theta\theta} - \Phi U_{\theta\theta}) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (U \Phi_r - \Phi U_r) + r^{-1} (U \Phi_r - \Phi U_r) + r^{-2} (U \Phi_{\theta\theta} - \Phi U_{\theta\theta}) \\ &= r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r (U \Phi_r - \Phi U_r) \right\} + r^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ r (U \Phi_\theta - \Phi U_\theta) \right\} \\ &\equiv F_1(r, \theta) + F_2(r, \theta), \end{aligned}$$

da cui, notando che  $\int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta = r^{-2} [r (U \Phi_\theta - \Phi U_\theta)]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$  per ogni  $r$ , segue

$$\iint_{C(\varepsilon, R)} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^R r F(r, \theta) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^R r F_1(r, \theta) dr d\theta = \left[ \int_0^{2\pi} r (U \Phi_r - \Phi U_r) d\theta \right]_{r=\varepsilon}^{r=R} \quad \square$$

<sup>6</sup> Più avanti calcoleremo le soluzioni fondamentali del laplaciano in dimensione arbitraria, per ora presentiamo una dimostrazione elementare della (5.19) basata sulle *coordinate polari* in  $\mathbb{R}^2$ .

**Dim. della (5.20):** Fissata una funzione test  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ , applichiamo l'identità (5.21) alla funzione

$$u(x, y) \equiv U(r, \theta) = (2\pi)^{-1} \log r,$$

sulla corona con  $C(\varepsilon, R)$ , dove  $R$  è così grande che  $B_R \supset \text{supp}(f)$ . Poichè  $\Delta u \equiv 0$  su  $C(\varepsilon, R)$ , si ha  $r(U_\theta - \Phi_r) = 0$  per  $r = R$ , mentre  $U_r = 1/2\pi r$ . La (5.21) diventa allora

$$\iint_{C(\varepsilon, R)} u \Delta \varphi \, dx \, dy = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon \left\{ \log \varepsilon \cdot \Phi_r(\varepsilon, \theta) - \Phi(\varepsilon, \theta) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \right\} d\theta.$$

Per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , troviamo:

$$\begin{aligned} \left\{ \iint_{C(\varepsilon, R)} u \Delta \varphi \, dx \, dy \right\} &\rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} u \Delta \varphi \, dx \, dy, \\ \left\{ \Phi(\varepsilon, \theta) \right\} &\rightarrow \varphi(0, 0), \\ \left\{ \Phi_r(\varepsilon, \theta) \right\} &\rightarrow \varphi_x(0, 0) \cos \theta + \varphi_y(0, 0) \sin \theta, \end{aligned}$$

e quindi, poichè  $\varepsilon \log \varepsilon \rightarrow 0$ , otteniamo la (5.20). Questo completa la dimostrazione del Teorema 11.  $\square$

# Capitolo 6

## Richiami di Analisi geometrica

### 6.1 Curve nello spazio

Un arco di curva regolare nello spazio a tre dimensioni è un insieme  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  costituito dai punti di coordinate

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \\ z = \varphi_3(t) \end{cases} \quad (6.1)$$

dove

$$\phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

è un'applicazione di classe  $C^1$  sull'intervallo aperto  $]a, b[$ , continua su  $[a, b]$  e tale che

$$|\dot{\phi}(t)|^2 \equiv \varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2 + \varphi_3'(t)^2 > 0, \quad \forall t \in ]a, b[.$$

Il vettore  $\dot{\phi}(t)/|\dot{\phi}(t)|$  è il *vettore tangente* alla curva nel punto  $\phi(t)$ , il suo verso definisce il *verso di percorrenza* della curva. L'*elemento di lunghezza* della curva  $\gamma$  è

$$ds = |\dot{\phi}(t)| dt,$$

quindi la *lunghezza totale* di  $\gamma$  e l'*integrale curvilineo* di una funzione  $g : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$  sono rispettivamente:

$$|\gamma| = \int_a^b |\dot{\phi}(t)| dt, \quad \int_{\gamma} g ds = \int_a^b g(\phi(t)) |\dot{\phi}(t)| dt.$$

Quest'ultimo integrale è invariante per *cambiamenti di parametro*, cioè non cambia se si sostituisce  $\phi(t)$  con  $\tilde{\phi}(s) = \phi(\theta(s))$ ,  $\alpha \leq s \leq \beta$ , dove  $\theta : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  è una funzione bigettiva con  $\theta'(s) > 0$ . Si può dare una nozione più generale di curva richiedendo che per ogni punto di  $\gamma$  esista un intorno  $V \subset \mathbb{R}^3$  ed una  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $\dot{\phi}(t) \neq 0$  per cui la rappresentazione (6.1) valga limitatamente ai punti  $(x, y, z) \in V$ .

**Osservazione 10. (forma cartesiana)** Ricorrendo al Teorema del Dini si prova che ogni curva  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  può essere posta *localmente*<sup>1</sup> in *forma cartesiana*, cioè descritta come l'*ins. degli zeri* di due funzioni reali

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

che in ogni punto della curva, verifichino la *condizione di rango massimo*

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_z f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_z f_2 \end{pmatrix} = 2. \quad (6.3)$$

<sup>1</sup> cioè in un opportuno intorno di ogni suo punto.

La (6.3) equivale a dire che i due vettori  $\nabla f_1(x, y, z)$  e  $\nabla f_2(x, y, z)$  sono linearmente indipendenti, il che significa che le due superfici  $\Sigma_1 = \{f_1 = 0\}$  e  $\Sigma_2 = \{f_2 = 0\}$  sono *trasversali*, cioè hanno piani tangenti diversi in ogni punto in comune. Grazie al Teorema del Dini, si dimostra anche il viceversa: ogni curva cartesiana del tipo (6.2)–(6.3) può essere localmente scritta in *forma parametrica*, cioè nella forma (6.1).

**Osservazione 11. (curve in  $\mathbb{R}^n$ )** Analogamente al caso tridimensionale, si chiama arco di curva in  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 2$ , un insieme del tipo

$$\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \phi(t)\},$$

dove  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un'applicazione continua, di classe  $\mathcal{C}^1$  su  $]a, b[$ , tale che  $\dot{\phi}(t) \neq 0$ . La forma cartesiana si ha scrivendo  $\gamma$  come luogo degli zeri di  $n - 1$  funzioni  $f_1, \dots, f_{n-1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , tali che la matrice jacobiana  $Df(x)$ , che è una matrice  $(n - 1) \times n$ , abbia *rango massimo* in ogni punto, cioè

$$\text{rango} \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right] = n - 1, \quad \forall x \in \gamma.$$

## 6.2 Superfici nello spazio

Il *prodotto esterno* (o *vettoriale*) di due vettori  $A, B \in \mathbb{R}^3$  è il vettore  $A \wedge B \in \mathbb{R}^3$  che ha per componenti i minori  $2 \times 2$  della matrice  $\text{col}\{A, B\}$  con segni opportuni. Precisamente poniamo:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \text{col}\{A, B\} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, \quad A \wedge B = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Il vettore  $A \wedge B$  è ortogonale ai vettori  $A$  e  $B$ , ed è nullo se e solo se tali vettori sono linearmente dipendenti, il suo modulo  $|A \wedge B|$  è uguale all'area del *parallelogramma* di  $\mathbb{R}^3$  di lati  $A, B$ .

Una *superficie*  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  è un insieme rappresentabile *localmente* nella forma

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases} \quad (6.4)$$

dove  $\phi = \{\varphi, \psi, \chi\} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un'applicazione di classe  $\mathcal{C}^1$  su un dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$  e continua su  $\overline{D}$ , la cui matrice jacobiana  $D\phi$  ha *rango massimo*, cioè

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \varphi_u(u, v) & \varphi_v(u, v) \\ \psi_u(u, v) & \psi_v(u, v) \\ \chi_u(u, v) & \chi_v(u, v) \end{bmatrix} = 2, \quad \forall (u, v) \in U. \quad (6.5)$$

In altri termini, considerati i tre minori

$$\mathcal{M}_1 = \psi_u \chi_v - \psi_v \chi_u, \quad \mathcal{M}_2 = \chi_u \varphi_v - \chi_v \varphi_u, \quad \mathcal{M}_3 = \varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u,$$

richiediamo che

$$W(u, v) \equiv \left| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right| \equiv \left\{ \mathcal{M}_1(u, v)^2 + \mathcal{M}_2(u, v)^2 + \mathcal{M}_3(u, v)^2 \right\}^{1/2} > 0.$$

Dato che  $\partial \phi / \partial u$  e  $\partial \phi / \partial v$  sono i vettori tangenti alle curve

$$t \mapsto \phi(t, v), \quad t \mapsto \phi(u, t),$$

la condizione (6.5) afferma che questi due vettori sono linearmente indipendenti in ogni punto  $(u, v)$ , e quindi che la superficie  $\Sigma$  possiede in ogni suo punto un *piano tangente*: quello generato dai due vettori.

Per quanto detto sopra sul modulo del prodotto interno di due vettori, è naturale interpretare

$$dS = W(u, v) du dv$$

come l'*elemento di superficie* nel punto  $X = \phi(u, v) \in \Sigma$ . Conseguentemente, l'area della superficie  $\Sigma$  e l'integrale su  $\Sigma$  di una funzione  $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  sono rispettivamente dati da:

$$\text{area}(\Sigma) = \iint_D W(u, v) du dv, \quad \int_{\Sigma} g dS = \iint_D g(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) W(u, v) du dv.$$

Accanto alla rappresentazione parametrica (6.4), una superficie può essere rappresentata (localmente) nella forma cartesiana:

$$\Sigma = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\} \quad (6.6)$$

dove  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , è una funzione  $\mathcal{C}^1$  tale che  $\nabla f(x, y, z) \neq 0$  in ogni punto di  $\Sigma$ . Il Teorema del Dini consente di passare (localmente) dalla forma parametrica a quella cartesiana e viceversa.

Notiamo che, per ogni curva  $\gamma \subset \Sigma$  passante per un dato punto  $X \in \Sigma$ , il vettore tangente a  $\gamma$  in  $X$  è ortogonale al vettore  $\nabla f(X)$ ; dunque quest'ultimo è un *vettore normale* a  $\Sigma$ . Il verso di  $\nabla f(X)$  determina l'*orientamento della superficie*.

**Osservazione 12. (superfici di tipo grafico)** Sia  $\chi(x, y)$  una funzione reale definita su un dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$  e supponiamo che  $\nabla \chi(x, y) \neq 0$  in ogni punto  $(x, y) \in D$ . Il grafico di  $\chi$ , cioè l'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z) : z = \chi(x, y)\},$$

è una superficie con parametrizzazione  $\phi: (x, y) \mapsto (x, y, \chi(x, y))$ . I minori  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  della matrice  $D\phi$  sono  $\chi_x, \chi_y, 1$ , quindi l'integrale su  $\Sigma$  di una data funzione  $g(x, y, z)$  è

$$\int_{\Sigma} g dS = \iint_D g(x, y, \chi(x, y)) W(x, y) dx dy, \quad \text{dove } W(x, y) = \sqrt{\chi_x^2(x, y) + \chi_y^2(x, y) + 1}. \quad (6.7)$$

**Esempio 6. [sfera]** La classica parametrizzazione della sfera  $S_r$  di raggio  $r$  è fornita dalle *coordinate polari*

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ x = r \cos \theta \end{cases}$$

dove  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Con semplici calcoli si verifica che l'elemento di superficie è  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , quindi l'integrale di una funzione  $g(x, y, z)$  su  $S_r$  è

$$\iint_{S_r} g dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} g(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (6.8)$$

D'altra parte, se spezziamo  $S_r$  nell'emisfero superiore e in quello inferiore, possiamo applicare su ciascun emisfero la formula (6.7) con  $\chi(x, y) = \pm \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$  ottenendo un'altra espressione dell'integrale di  $g$ :

$$\iint_{S_r} g dS = \iint_{D_r} \left\{ g\left(x, y, \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}\right) + g\left(x, y, -\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}\right) \right\} \frac{r}{\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy \quad (6.9)$$

dove  $D_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ .

### 6.3 Ipersuperfici

Nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , l'analogo delle superfici (di  $\mathbb{R}^3$ ) sono le *ipersuperfici*, cioè le varietà di dimensione  $n - 1$ . La rappresentazione più semplice di un'ipersuperficie  $\Sigma$  è quella cartesiana:

$$\Sigma = \{x \in \Omega : f(x) = 0\},$$

dove  $\Omega$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $\mathcal{C}^1$  tale che  $\nabla f(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \Sigma$ .

Riarrangiando le variabili possiamo ridurci (localmente) al caso in cui  $\Omega \equiv U \times ]\alpha, \beta[$  è un cilindro e

$$f_{x_n}(x) \neq 0, \quad \forall x \in \Sigma. \quad (6.10)$$

Il Teorema del Dini assicura allora che  $\Sigma$  è il grafico di una funzione  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^1$ , cioè

$$\Sigma = \{x \in \Omega : x_n = \varphi(x')\}, \quad \text{dove } x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U.$$

In particolare vale l'eguaglianza

$$f(x', \varphi(x')) \equiv 0, \quad \forall x' \in U,$$

da cui, derivando rispetto a  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ), ricaviamo

$$\varphi_{x_j}(x') = -\frac{f_{x_j}(x', \varphi(x'))}{f_{x_n}(x', \varphi(x'))}.$$

Per passare alla forma parametrica, basta prendere

$$\begin{cases} x_1 & = u_1 \\ \dots & \\ x_{n-1} & = u_{n-1} \\ x_n & = \varphi(u_1, \dots, u_{n-1}) \end{cases}.$$

Un semplice calcolo mostra allora che l'elemento di misura  $(n-1)$ -dimensionale su  $\Sigma$  è dato da

$$W(x') = \left\{ |\nabla \varphi(x')|^2 + 1 \right\}^{1/2} \equiv \frac{|\nabla_x f(x', \varphi(x'))|}{|f_{x_n}(x', \varphi(x'))|}$$

dove  $\nabla \varphi = \nabla_{x'} \varphi(x')$ , cosicché, posto  $\nabla f = \nabla_x f(x)$ , l'integrale di una funzione  $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  è definito da:

$$\int_{\Sigma} g \, dS = \int_U g(x', \varphi(x')) |\nabla f(x', \varphi(x'))| |f_{x_n}(x', \varphi(x'))|^{-1} dx'.$$

Il vettore  $\nabla f(x)$  è ortogonale ai vettori tangenti di tutte le curve giacenti in  $\Sigma$  che passano per il punto  $x \in \Sigma$ , dunque è un vettore normale a  $\Sigma$ . Ora lo spazio tangente a  $\Sigma$  nel punto  $x$  ha dimensione  $n-1$  (infatti contiene i vettori tangenti alle  $n-1$  curve coordinate passanti per  $x$ , che sono linearmente indipendenti), pertanto, a meno di dilatazioni,  $\nabla f(x)$  è l'unico vettore normale a  $\Sigma$ . Per quanto riguarda il verso, il vettore  $\nabla f(x)$  è diretto verso l'aperto  $\{x : f(x) > 0\}$ , cioè ha la stessa direzione di crescita della funzione  $f(x)$ . In particolare, se l'ipersuperficie  $\Sigma$  decompone lo spazio  $\mathbb{R}^n$  in due aperti connessi  $D = \{x : f(x) < 0\}$  e  $D' = \{x : f(x) > 0\}$ , di cui il primo limitato<sup>2</sup>, il vettore  $\nabla f(x)$  è diretto verso l'esterno del dominio  $D$ . Per tale motivo ci si riferisce a  $\nabla f(x)$  come al vettore *normale esterno* a  $\Sigma$ .

Normalizzando, otteniamo la *normale esterna* a  $\Sigma$  nel punto  $x$ :

$$\nu(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}.$$

Nel caso particolare in cui  $\Sigma$  è un grafico di  $x_n$  rispetto alle variabili  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ , risulta  $f_{x_n} = 1$  e dunque il vettore  $\nu(x)$  è diretto verso l'alto.

<sup>2</sup> ciò accade ad esempio nel caso in cui  $f(x)$  tende a  $+\infty$  per  $|x| \rightarrow \infty$ .

## 6.4 Varietà $k$ -dimensionali di $\mathbb{R}^n$

Abbiamo introdotto le curve e le ipersuperfici di  $\mathbb{R}^n$ , ora definiamo le *varietà  $k$ -dimensionali* per ogni intero  $k$  con  $1 \leq k \leq n-1$ . Premettiamo alcuni semplici fatti di algebra lineare:

Dati  $k$  vettori  $V_1, \dots, V_k \in \mathbb{R}^n$ , con  $V_j = (v_{j1}, \dots, v_{jn})$ , consideriamo la matrice  $n \times k$

$$\text{col} \{V_1, \dots, V_k\} = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Per  $k = n$ , la (6.11) è una matrice quadrata con determinante diverso da zero se e solo se i vettori  $\{V_j\}$  sono linearmente indipendenti: in tal caso questi vettori formano un prisma di  $\mathbb{R}^n$  con *misura  $n$ -dimensionale*

$$W_n = |\det(\text{col} \{V_1, \dots, V_k\})|.$$

Se  $k < n$ , i vettori  $V_1, \dots, V_k$  sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice (6.11) ha rango  $k$ , cioè quando fra tutti i suoi minori di ordine  $k$  ve ne è qualcuno non singolare. Indicando tali minori con  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_\nu$ , dove  $\nu = \binom{n}{k}$ , vediamo che il prisma  $k$ -dimensionale che come spigoli i vettori  $V_j$  ha misura ( $k$ -dimensionale)

$$W_k = (\mathcal{M}_1^2 + \dots + \mathcal{M}_\nu^2)^{1/2}. \quad (6.12)$$

Un ins.  $M \subset \mathbb{R}^n$  è una *varietà regolare  $k$ -dimensionale* se è localmente rappresentabile nella forma

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, \dots, u_k) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(u_1, \dots, u_k) \end{cases} \quad (6.13)$$

dove le  $\varphi_j$  sono funzioni reali di classe  $C^1$  su un intervallo aperto  $U \subset \mathbb{R}^k$ , continue su  $\bar{U}$  e tali che la matrice jacobiana ( $n \times k$ ) dell'applicazione

$$\phi \equiv (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

verifichi la condizione di rango massimo:

$$\text{rango} \left[ \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u) \right] = k, \quad \forall u = (u_1, \dots, u_k) \in U. \quad (6.14)$$

Se consideriamo le  $k$  *curve coordinate* su  $M$  passanti per un dato punto  $x = \phi(u_1, \dots, u_k) \in M$ , cioè

$$\begin{cases} \phi_{(1)} : t \mapsto \phi(t, u_2, \dots, u_k) \\ \dots \\ \phi_{(k)} : t \mapsto \phi(u_1, u_2, \dots, t) \end{cases}$$

vediamo che la (6.14) significa che i relativi *vettori tangenti*

$$\frac{\partial \phi}{\partial u_1}(t), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial u_k}(t) \quad (6.15)$$

sono linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}^n$ , cioè  $M$  ha in ogni punto uno *spazio tangente  $k$ -dimensionale*.

Detti  $\mathcal{M}_h(u)$ ,  $h = 1, \dots, \nu$ , dove  $\nu = \binom{n}{k}$ , i minori  $k \times k$  della matrice jacobiana  $(\partial\varphi_i/\partial u_j)(u)$  e posto

$$W(u) = (\mathcal{M}_1(u)^2 + \dots + \mathcal{M}_\nu(u)^2)^{1/2}, \quad (6.16)$$

l'elemento di *misura k-dimensionale* sulla varietà  $M$  è definito da

$$d\mu_k = W(u) du_1 \cdots du_k,$$

pertanto la misura  $k$ -dimensionale di  $M$  e l'integrale di una funzione  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  sono dati da

$$\mu_k(M) = \int_U W(u) du_1 \cdots du_k, \quad \int_M g d\mu_k = \int_U g(\phi(u)) W(u) du_1 \cdots du_k.$$

Una varietà regolare  $M$  *in forma cartesiana* è un ins. di punti  $x \in \Omega$ ,  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ , che può descriversi (almeno localmente) come l'insieme degli zeri di  $n - k$  funzioni  $f_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^1$ , cioè scriverci come

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ \dots \\ f_{n-k}(x) = 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

dove le  $f_j(x)$  verificano la condizione di rango massimo:

$$\text{rango} \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right] = n - k, \quad \forall x \in M. \quad (6.18)$$

Anche qui, grazie al Teorema del Dini, si può passare dalla forma parametrica a quella cartesiana e viceversa.

## Notazioni

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $D$  un dominio limitato con chiusura  $\bar{D} \subset \Omega$ . Il *gradiente* di un campo scalare  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  è il campo vettoriale:

$$\nabla u(x) = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}),$$

la *divergenza* di un campo vettoriale  $F \equiv (f_1, \dots, f_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  è il campo scalare

$$\text{div } F(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x).$$

Notiamo che

$$\text{div } \nabla u = \Delta u.$$

Indicando con  $\partial D$  la *frontiera* di  $D$  (che sotto ragionevoli ipotesi è una ipersuperficie di  $\mathbb{R}^n$ ) e con  $\nu(x)$  la normale esterna a  $D$  nel punto  $x \in \partial D$ , per ogni funzione regolare  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  poniamo

- $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = \nabla f(x) \cdot \nu(x)$  (*derivata normale* di  $f$  nel punto  $x \in \partial D$ ),
- $\int_D f(x) dx = \frac{1}{m_n(D)} \int_D f(x) dx$
- $\int_{\partial D} f(y) dS(y) = \frac{1}{m_{n-1}(\partial D)} \int_{\partial D} f(y) dS(y), \quad m_{n-1}(\partial D) = \int_{\partial D} dS(y),$

dove  $dS$  è la *misura (n - 1)-dimensionale* su  $\partial D$ .

## 6.5 Formula di Gauss-Green

Per ogni dominio limitato  $D \subset \mathbb{R}^n$  ed ogni campo vettoriale  $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , vale l'identità

$$\int_D \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial D} F(x) \cdot \nu(x) dS(x).$$

Dato che  $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$ ,  $\operatorname{div}(\varphi F) = \varphi \operatorname{div} F + \nabla \varphi \cdot F$ , possiamo scrivere

$$\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi = \left\{ \operatorname{div}(\varphi \nabla \psi) - \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \right\} - \left\{ \operatorname{div}(\psi \nabla \varphi) - \nabla \psi \cdot \nabla \varphi \right\} = \operatorname{div}(\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi),$$

e otteniamo, per ogni  $\varphi, \psi : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^2$ , la seguente variante della Formula di Gauss-Green:

$$\int_D (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dx = \int_{\partial D} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) dS. \quad (6.19)$$

**Osservazione 13.** In Fluidodinamica, data una ipersuperficie orientata  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ , la quantità

$$\int_{\Sigma} F \cdot \nu dS$$

cioè l'integrale della componente normale di  $F(x)$ , rappresenta il *flusso* del campo  $F(x)$  che attraversa  $\Sigma$ . Se  $\operatorname{div} F \equiv 0$  il fluido è *incomprimibile* e la formula di Gauss-Green dice che il flusso entrante nel dominio  $D$  è uguale al flusso uscente, cioè, dividendo idealmente  $D$  in due parti con frontiere  $\Sigma^-$  e  $\Sigma^+$ , risulta

$$\int_{\Sigma^+} F \cdot \nu dS = \int_{\Sigma^-} F \cdot \nu dS.$$

Si noti che qui la superficie  $\Sigma^-$  è orientata in modo opposto rispetto a  $\Sigma^+$ , cosicchè

$$\int_{\Sigma} F \cdot \nu dS = \int_{\Sigma^+} F \cdot \nu dS - \int_{\Sigma^-} F \cdot \nu dS.$$

## 6.6 Formula della co-area

Per ogni funzione continua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si ha

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{B_r} f dx = \int_{\partial B_r} f dS, \quad (6.20)$$

o, equivalentemente,

$$\int_{B_\rho} f dx = \int_0^\rho \left\{ \int_{S_r} f dS \right\} dr. \quad (6.21)$$

**Dim.** Eseguendo il cambiamento di variabili  $x = ry$ , e applicando la formula di Gauss-Green, troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \int_{B_r} f(x) dx &= \frac{\partial}{\partial r} \int_{B_1} f(ry) r^n dy = nr^{n-1} \int_{B_1} f(ry) dy + \int_{B_1} \sum \partial_j f(ry) y_j r^n dy \\ &= nr^{-1} \int_{B_r} f(x) dx + r^{-1} \int_{B_r} \sum \partial_j f(x) x_j dx = nr^{-1} \int_{B_r} f dx + r^{-1} \int_{B_r} \left\{ \sum \partial_j (f(x) x_j) - nf(x) \right\} dx \\ &= r^{-1} \int_{B_r} \sum \partial_j (f(x) x_j) dx = r^{-1} \int_{S_r} \sum f(x) x_j \nu_j(x) dS(x) = \int_{S_r} \sum f(x) \nu_j(x)^2 dS(x) = \int_{S_r} f(x) dS(x). \end{aligned}$$

cioè la (6.20). □

**Osservazione 14.** Nei casi  $n = 2, 3$ , la (6.21) si può anche ottenere passando a coordinate polari o sferiche.

## Notazioni

Se  $\omega_n$  e  $\gamma_n$  sono le misure  $n$  dimensionale della palla unitaria e  $(n-1)$  dim. della sfera unitaria di  $\mathbb{R}^n$ , cioè

$$\omega_n = m_n(B_1), \quad \gamma_n = m_{n-1}(\partial B_1),$$

dalla formula della co-area deduciamo che

$$\gamma_n = n \omega_n. \tag{6.22}$$

In particolare, per  $n = 2, 3$  risulta:

$$\omega_2 = \pi, \quad \gamma_2 = 2\pi, \quad \omega_3 = (4/3)\pi, \quad \gamma_3 = 4\pi.$$

# Capitolo 7

## Equazione di Laplace in $\mathbb{R}^n$

L'equazione di Laplace ( $\simeq 1790$ )

$$\Delta u \equiv u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n} = 0$$

descrive le soluzioni stazionarie (cioè indipendenti dal tempo) dell'equazione del calore. Nel caso non omogeneo, cioè in presenza di una *sorgente*  $f(x)$ , abbiamo l'equazione di Poisson:

$$\Delta u = f(x)$$

### 7.1 Soluzione fondamentale

Estendendo quanto fatto in precedenza nel caso bidimensionale, costruiremo ora una *soluzione fondamentale*  $E_n(x)$  del Laplaciano in  $\mathbb{R}^n$ , cioè una soluzione dell'equazione di Poisson dove la sorgente è la delta di Dirac:

$$\Delta E_n(x) = \delta(x). \quad (7.1)$$

Essendo  $\delta(x) \equiv 0$  sull'aperto  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $E_n(x)$  dovrà essere una funzione armonica su tale aperto, dunque per ragioni di simmetria cercheremo  $E_n(x)$  fra le funzioni armoniche *radiali*:

$$E_n(x) \equiv \varphi(r) \quad r = |x| > 0.$$

Dato che  $\partial_{x_j} r = x_j/r$ , infatti  $2x_j = \partial_{x_j} r^2 = 2r \partial_{x_j} r$ , troviamo:

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} E_n &= \varphi'(r) \frac{x_j}{r}, \\ \partial_{x_j}^2 E_n &= \varphi''(r) \left(\frac{x_j}{r}\right)^2 + \varphi'(r) \frac{1}{r} + \varphi'(r) x_j \left(-\frac{x_j}{r^3}\right), \end{aligned}$$

da cui, sommando per  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\Delta E_n(x) = \varphi''(r) + n \frac{\varphi'(r)}{r} - \frac{\varphi'(r)}{r} = \varphi''(r) + (n-1) \frac{\varphi'(r)}{r}.$$

Pertanto, affinché  $E_n(x)$  sia armonica su  $\{x \neq 0\}$ , la funzione  $\psi(r) \equiv \varphi'(r)$  dovrà soddisfare l'equazione

$$\psi'(r) + (n-1) \frac{\psi(r)}{r} = 0 \quad (r \neq 0),$$

che ha per soluzione

$$\psi(r) = \frac{C}{r^{n-1}}.$$

In conclusione, a meno di costanti additive le funzioni radiali armoniche su  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  sono tutte e sole le funz.

$$E_n(x) = \begin{cases} C_2 \log |x| & \text{se } n = 2, \\ \frac{C_n}{|x|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3. \end{cases} \quad (7.2)$$

**Osservazione 15.** Consideremo le funzioni  $E_n(x)$  come elementi dello spazio  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Il fatto che  $\Delta E_n(x) \equiv 0$  sull'aperto  $\{x \neq 0\}$  non assicura che  $E_n(x)$  sia una funzione armonica su  $\mathbb{R}^n$ , per lo stesso motivo per cui la funzione di Heaviside non è una funzione costante pur avendo derivata nulla per ogni  $x \neq 0$ .

**Teorema 12.** [soluzione fondamentale] Scegliendo nella (7.2) le costanti

$$C_2 = \frac{1}{2\pi}, \quad C_n = \frac{-1}{n(n-2)\omega_n}, \quad (7.3)$$

otteniamo una soluzione debole dell'equazione

$$\Delta E_n(x) = \delta(x) \quad \text{su } \mathbb{R}^n,$$

il che significa che

$$\int_{\mathbb{R}^3} E_n(x) \Delta \varphi(x) dx = \langle \delta, \varphi \rangle \equiv \varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (7.4)$$

**Dimostrazione:** Fissata  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , notiamo che  $E_n(x)\Delta\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  e dunque

$$\int_{\mathbb{R}^3} E_n(x)\Delta\varphi dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon \quad \text{dove } I_\varepsilon = \int_{B_\varepsilon^c} E_n(x)\Delta\varphi(x) dx, \quad B_\varepsilon^c = \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon.$$

Applicando la formula di Gauss-Green (6.19) alla corona sferica  $\Omega = B_R \setminus B_\varepsilon$ , dove  $B_R$  è una palla di  $\mathbb{R}^n$  abbastanza grande da contenere il supporto di  $\varphi$ , possiamo scrivere:

$$I_\varepsilon = \int_{B_\varepsilon^c} \varphi \Delta E_n dx - \int_{\partial B_\varepsilon} E_n \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS + \int_{\partial B_\varepsilon} \varphi \frac{\partial E_n}{\partial \nu} dS \equiv J_\varepsilon + \alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon$$

dove  $\nu(x) \equiv x/|x|$  è la normale esterna a  $B_\varepsilon$  (cioè  $-\nu(x)$  è la normale esterna a  $\Omega$ ) nel punto  $x \in \partial B_\varepsilon$ . Essendo  $\Delta E_n \equiv 0$  fuori dell'origine, risulta  $J_\varepsilon = 0$ ; stimiamo allora le quantità  $\alpha_\varepsilon$  e  $\beta_\varepsilon$ . Dato che  $d\varphi/d\nu$  è una funzione continua e quindi limitata su  $B_1$ , esiste  $M > 0$  per cui  $|(d\varphi/d\nu)(x)| \leq M$  su  $\partial B_\varepsilon, \forall \varepsilon \leq 1$ , dunque dalla (7.2) ricaviamo:

$$|\alpha_\varepsilon| \leq \begin{cases} M C_2 \log \varepsilon \cdot 2\pi\varepsilon & \text{se } n = 2, \\ M \frac{|C_n|}{\varepsilon^{n-2}} \cdot \gamma_n \varepsilon^{n-1} & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

e quindi, in ogni caso,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon = 0.$$

Per quanto riguarda  $\beta_\varepsilon$  osserviamo che, per  $|x| = \varepsilon$ , si ha

$$\frac{\partial E_n}{\partial \nu}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial E_n}{\partial x_j}(x) \frac{x_j}{|x|} = \frac{\partial E_n}{\partial \rho}(x) = \begin{cases} C_2 \varepsilon^{-1} & \text{se } n = 2, \\ -C_n(n-2) \varepsilon^{-(n-1)} & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \quad (7.5)$$

pertanto

$$\beta_\varepsilon = \begin{cases} C_2 2\pi \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \varphi dS & \text{se } n = 2, \\ -C_n(n-2) \gamma_n \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \varphi dS & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Passiamo al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$ : dato che  $\varphi(x)$  è continua nell'origine, risulta

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} \varphi dS = \varphi(0),$$

e quindi:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon = \begin{cases} C_2 2\pi \varphi(0) & \text{se } n = 2, \\ -C_n(n-2) \gamma_n \varphi(0) & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Per ottenere la (7.4) basterà allora scegliere le costanti  $C_n$  come nella (7.3).  $\square$

In conclusione abbiamo trovato la seguente soluzione fondamentale del laplaciano in  $\mathbb{R}^n$ :

$$E_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{se } n = 2, \\ \frac{-1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{se } n \geq 3. \end{cases} \quad (7.6)$$

Per avere una soluzione dell'equazione di Poisson

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{su } \mathbb{R}^n \quad (7.7)$$

con  $f(x)$  regolare e a supporto compatto, basterà prendere la funzione

$$u(x) = (E_n * f)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} E_n(y) f(x-y) dy. \quad (7.8)$$

In particolare, nello spazio fisico  $\mathbb{R}^3$  si ha

$$E_3(x) = \frac{-1}{4\pi|x|}, \quad u(x) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy. \quad (7.9)$$

Osserviamo che non vi sono problemi di definizione per la funzione  $u(x)$ ; infatti  $f(x)$  è a supporto compatto, cosicchè, per ogni  $x$ , la funzione integranda si annulla per  $|y|$  sufficientemente grande, mentre  $E_n(y)$  appartiene a  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , quindi l'integrale in (7.8) converge per ogni fissato valore di  $x$ . Dal Teor. 9 segue poi che  $u(x)$  è una funzione di classe  $\mathcal{C}^k$  purchè  $f(x)$  sia di classe  $\mathcal{C}^k$  e a supporto compatto.

**Teorema 13. [equazione di Poisson]** Per ogni  $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$  la funzione (7.8) appartiene a  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$  e risolve l'equazione di Poisson (7.7).

**Dim.:** Dato che  $\Delta E_n = \delta$  possiamo ricorrere alle seguenti proprietà della convoluzione:

$$\delta * f = f, \quad \partial^\alpha(\varphi * \psi) = (\partial^\alpha \varphi) * \psi = \varphi * (\partial^\alpha \psi),$$

per concludere, almeno formalmente, che

$$\Delta(E_n * f) = \Delta E_n * f = \delta * f = f.$$

Per giustificare questa dimostrazione occorre però fare uso delle derivate deboli (vedi più avanti). Se vogliamo dare una dim. classica, possiamo seguire la traccia della dim. del Teor. 12 e procedere in questo modo :

Essendo  $f \in \mathcal{C}^2$ ,  $E_n \in L_0^1$ , sappiamo che  $\partial_j^2 u = (E_n * \partial_j^2 f)$  e quindi

$$\Delta u(x) = (E_n * \Delta f)(x).$$

Siccome  $f$  è una funzione a supporto compatto, per ogni dato  $x \in \mathbb{R}^n$  possiamo fissare una palla  $B_R$  così grande che  $f(x-y) = 0$  per  $|y| \geq R$ ; ma allora, dato che  $\Delta_x[f(x-y)] = \Delta_y[f(x-y)]$ , troviamo:

$$\Delta u(x) = \int_{B_R} E_n(y) \Delta_x[f(x-y)] dy = \int_{B_R} E_n(y) \Delta_y[f(x-y)] dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(x)$$

dove

$$I_\varepsilon(x) = \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} E_n(y) \Delta_y f(x-y) dy.$$

Per ogni dato  $x \in \mathbb{R}^n$  applichiamo ora Gauss-Green (6.19) alla corona  $\Omega \equiv B_R \setminus B_\varepsilon \subset \mathbb{R}_y^n$  con

$$\varphi(y) = E_n(y), \quad \psi(y) = f(x-y).$$

Tenendo conto che la normale esterna ad  $\Omega$  su  $\partial B_\varepsilon$  è rivolta verso l'origine, troviamo:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x) &= \int_{B_\varepsilon} f(x-y) \Delta_y E_n(y) dy + \int_{\partial B_\varepsilon} E_n(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y) dS(y) - \int_{\partial B_\varepsilon} f(x-y) \frac{\partial E_n}{\partial \nu}(y) dS(y) \\ &\equiv J_\varepsilon(x) + \alpha_\varepsilon(x) + \beta_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

dove  $\nu$  è la normale rivolta verso l'origine. Dobbiamo ora calcolare il limite di  $I_\varepsilon(x)$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

Il primo dei tre addendi di  $I_\varepsilon(x)$  è nullo poiché  $\Delta E_n(y) \equiv 0$  fuori dall'origine. Il secondo addendo si stima esattamente come nel Teor. 12:

$$|\alpha_\varepsilon(x)| \leq \begin{cases} M \log \varepsilon \cdot \varepsilon & , n = 2, \\ \frac{M}{n-2} \varepsilon & , n \geq 3, \end{cases}$$

cosicché  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon(x) = 0$ . Consideriamo infine il termine

$$\beta_\varepsilon(x) = - \int_{\partial B_\varepsilon} f(x-y) \frac{\partial E_n}{\partial \nu}(y) dS(y).$$

Poniamoci dapprima nel caso  $n \geq 3$ . Dato che  $\nu(y) = -y/|y|$  ricaviamo, sempre dalla (7.2), che

$$\frac{\partial E_n}{\partial \nu}(y) = - \frac{\partial E_n}{\partial \rho}(y) = \frac{C_n(n-2)}{|y|^{n-1}},$$

e quindi, per  $|y| = \varepsilon$ ,

$$\beta_\varepsilon(x) = - \int_{\partial B_\varepsilon} f(x-y) \frac{\partial E_n}{\partial \nu}(y) dS(y) = - \frac{C_n(n-2)}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon} f(x-y) dS(y) = - \frac{C_n(n-2)}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(y') dS(y').$$

Per concludere che  $\{I_\varepsilon(x)\} \rightarrow f(x)$ , mostreremo che  $\{\beta_\varepsilon(x)\} \rightarrow f(x)$  se si sceglie  $C_n$  in modo da avere

$$\frac{C_n(n-2)}{\varepsilon^{n-1}} = \frac{-1}{m_{n-1}(\partial B_\varepsilon)},$$

cioè

$$C_n = \frac{-1}{(n-2)\gamma_n} \equiv \frac{-1}{n(n-2)\omega_n}. \quad (7.10)$$

Con tale scelta si ha infatti

$$\beta_\varepsilon(x) = \int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(y') dS(y')$$

e quindi, grazie alla continuità di  $f$  nel punto  $x$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon(x) = f(x)$$

da cui la nostra tesi:

$$\Delta u(x) = (E * \Delta f)(x) = f(x).$$

Il caso  $n = 2$  si tratta in modo analogo: basta osservare che ora

$$\frac{\partial E_2}{\partial \nu} \equiv -\frac{\partial E_2}{\partial \rho} = -\frac{C_2}{\rho} \quad \text{e quindi} \quad \beta_\varepsilon(x) = -\frac{C_2}{\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon} f(x-y) dS(y)$$

per cui conviene scegliere  $C_2 = -1/2\pi$ . □

## 7.2 Proprietà delle funzioni armoniche

**Teorema 14. [media]** *Se  $u(x)$  è armonica su un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ , per ogni palla  $B_r(x_0) \subset \Omega$  risulta:*

$$\int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dS(x) = \int_{B_r(x_0)} u(x) dx = u(x_0). \quad (7.11)$$

**Dim.** Cominciamo col provare che

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dS(x) \right\} = 0.$$

Per eseguire la derivata rispetto ad  $r$  conviene effettuare il cambiamento di variabili  $x = x_0 + ry$  in modo da rendere il dominio d'integrazione indipendente da  $r$ :

$$\int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dS(x) = \frac{1}{\gamma_n} \int_{\partial B_1} u(x_0 + ry) dS(y) \equiv \int_{\partial B_1} u(x_0 + ry) dS(y).$$

Derivando troviamo

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_{\partial B_1} u(x_0 + ry) dS(y) \right\} = \int_{\partial B_1} \nabla u(x_0 + ry) \cdot y dS(y),$$

da cui, scambiando la derivata con l'integrale e applicando Gauss-Green (la normale esterna è  $(x - x_0)/r$ ),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dS(x) \right\} &= \int_{\partial B_1} \nabla u(x_0 + ry) \cdot y dS(y) = \int_{\partial B_r(x_0)} \nabla u(x) \cdot \frac{x - x_0}{r} dS(x) \\ &= \int_{\partial B_r(x_0)} \nabla u(x) \cdot \nu(x) dS(x) = \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS(x) = 0, \end{aligned}$$

cioè, per qualche costante  $C$ ,

$$\int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dS(x) \equiv C.$$

Ma allora, dato che  $u(x)$  è continua in  $x = x_0$ ,

$$\int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dS(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dS(x) = u(x_0).$$

Resta solo da dimostrare che

$$\int_{B_r(x_0, r)} u(x) dx = u(x_0).$$

Sfruttando la *formula della co-area*, e la parte già provata della (7.11), troviamo

$$\int_{B_r(x_0, r)} u(x) dx = \int_0^r \left\{ \int_{\partial B_\rho(x_0)} u(x) dS(x) \right\} d\rho = C \frac{r^n}{n},$$

per qualche costante  $C$ , per cui

$$\int_{B_r(x_0)} u(x) dx = \text{costante}.$$

Passando limite per  $r \rightarrow 0$ , ed usando ancora la continuità di  $u(x)$  in  $x_0$ , conseguiamo la tesi.  $\square$

**Corollario. [principio del massimo]** *Se  $\Delta u = 0$  in un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ , per ogni aperto  $D \subset\subset \Omega$  risulta*

$$\max_{x \in \overline{D}} u(x) = \max_{x \in \partial D} u(x).$$

*In altre parole, ogni funzione armonica in  $\overline{D}$  assume il suo valore massimo sul bordo di  $D$ .*

**Dim.** Possiamo supporre che  $D$  sia un aperto connesso. Sia  $M = \max \{u(x) : x \in \overline{D}\}$ . Se  $M = u(x_0)$  per qualche  $x_0 \in D$ , per ogni palla  $B_r(x_0) \subset D$  avremo (per il Teor. della media)

$$\int_{\partial B_r(x_0)} u(x) dx = M,$$

e quindi, essendo  $u(x) \leq M$  per ogni  $x$ , si ha necessariamente  $u(x) \equiv M$  su  $B_r(x_0)$ . Dunque  $u(x)$  risulta costantemente uguale ad  $M$  in un intorno del punto  $x_0$ . A questo punto con un ragionamento topologico (l'insieme degli  $x \in \Omega$  in cui  $u(x) = M$  è al tempo stesso chiuso ed aperto) concludiamo che  $u(x) \equiv M$  su tutto  $\Omega$ .  $\square$

**Osservazione [formula di Cauchy]** Sia  $f(z)$  una funzione olomorfa in un intorno di un dominio  $D$ , e sia  $z_0$  un punto interno a  $D$ . Allora, se  $\Gamma$  è il bordo di  $D$  orientato in senso antiorario, vale l'eguaglianza

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Nel caso in cui  $D$  sia un cerchio, posto  $z = x + iy$  e  $f = u + iv$ , da questa formula possiamo ritrovare il teorema della media per le due funzioni armoniche  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ .

# Capitolo 8

## Equazione di Fourier

Abbiamo trovato in precedenza la soluzione fondamentale dell'equazione del calore in una variabile spaziale; consideriamo ora il caso multidimensionale e cioè, se  $\Delta \equiv \Delta_x$  è il laplaciano su  $\mathbb{R}^n$ , il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = \delta(x). \end{cases} \quad (8.1)$$

Per affrontare questo problema faremo ricorso al *metodo dei mollificatori*.

### 8.1 Mollificatori

**Definizione 11.** Si chiamano *mollificatori* una famiglia  $\{\rho_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$  di funzioni  $\mathcal{C}^\infty$  su  $\mathbb{R}^n$  tali che

- i)  $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$ ,
- ii)  $\int \rho_\varepsilon(x) dx = 1$ ,
- iii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \delta} \rho_\varepsilon(x) dx = 0, \quad \forall \delta > 0$ .

- **Mollificatori di Friedrichs**

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{\rho(x/\varepsilon)}{\varepsilon^n \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx}$$

dove  $\rho(x)$  è una funzione non negativa, di classe  $\mathcal{C}^\infty$  nulla per  $|x| \geq 1$  e non identicamente nulla, e.g.

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

- **Mollificatori di Gauss**

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \frac{e^{-|x|^2/4\varepsilon}}{\varepsilon^{n/2}}.$$

Per i mollificatori di Friedrichs le tre condizioni (i), (ii), (iii) sono ovviamente soddisfatte. Per i mollificatori di Gauss le (i), (ii) sono ovvie; per provare la (iii) fissiamo  $\delta > 0$  ed eseguiamo la sostituzione  $y = x/\sqrt{\varepsilon}$ : dato che  $\{\delta/\sqrt{\varepsilon}\} \rightarrow +\infty$  e la funzione  $e^{-|y|^2/4}$  è sommabile su  $\mathbb{R}^n$ , otteniamo

$$\varepsilon^{-n/2} \int_{|x| \geq \delta} e^{-|x|^2/4\varepsilon} dx \equiv \int_{|y| \geq \delta/\sqrt{\varepsilon}} e^{-|y|^2/4} dy \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0.$$

**Osservazione 16.** I mollificatori di Gauss sono delle funzioni analitiche, quindi forniscono una *regolarizzazione analitica* quando vengono usati nella convoluzione. I mollificatori di Friedrichs sono funzioni a supporto compatto e quindi non possono essere analitici, essi hanno però il vantaggio di potersi “convolvere” con funzioni di  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  a crescita arbitrariamente grande all’infinito.

**Teorema 15. [convergenza alla Delta]** *Per ogni famiglia di mollificatori risulta*

$$\{\rho_\varepsilon\} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0,$$

dove la convergenza va intesa nel senso delle distribuzioni cioè

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \rho_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (8.2)$$

**Dim.** Proveremo di fatto la (8.2) per ogni funzione  $\varphi$  continua e a supporto compatto su  $\mathbb{R}^n$ , il che significa che  $\{\rho_\varepsilon\}$  tende alla  $\delta$  nel senso delle misure. Tenendo conto che  $\rho_\varepsilon(x)$  ha integrale 1, poniamo

$$I_\varepsilon \equiv \int \rho_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) = \int \rho_\varepsilon(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx,$$

e, per ogni fissato  $\delta > 0$ , spezziamo l’ultimo integrale in due parti:

$$I_\varepsilon = \int_{|x| \leq \delta} \rho_\varepsilon(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \int_{|x| > \delta} \rho_\varepsilon(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \equiv \alpha_{\varepsilon, \delta} + \beta_{\varepsilon, \delta}.$$

Maggiorando, troviamo

$$|\alpha_{\varepsilon, \delta}| \leq \sup_{|x| \leq \delta} |\varphi(x) - \varphi(0)| \int_{|x| \leq \delta} \rho_\varepsilon dx \leq \sup_{|x| \leq \delta} |\varphi(x) - \varphi(0)| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon dx = \sup_{|x| \leq \delta} |\varphi(x) - \varphi(0)| \equiv A_\delta,$$

$$|\beta_{\varepsilon, \delta}| \leq \sup_{|x| > \delta} |\varphi(x) - \varphi(0)| \int_{|x| > \delta} \rho_\varepsilon dx \leq 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{|x| > \delta} \rho_\varepsilon dx.$$

Ora, grazie alla continuità di  $\varphi(x)$  in  $x = 0$  e alla terza proprietà dei  $\{\rho_\varepsilon\}$ , abbiamo

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} A_\delta = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_{\varepsilon, \delta} = 0 \quad \forall \delta > 0;$$

di conseguenza, per ogni fissato valore di  $\delta$ , troviamo

$$\maxlim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I_\varepsilon| \leq \maxlim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{A_\delta + |\beta_{\varepsilon, \delta}|\} \leq A_\delta + \maxlim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\beta_{\varepsilon, \delta}| = A_\delta,$$

e quindi, mandando  $\delta$  a 0, concludiamo che  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I_\varepsilon| \equiv \maxlim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I_\varepsilon| = 0$ , che è la nostra tesi.  $\square$

Sia  $\{\rho_\varepsilon\}$  una famiglia di mollificatori su  $\mathbb{R}^n$ : dalla teoria della convoluzione (Teor. 9) sappiamo che, per ogni  $u \in L^p$ , la funzione  $\rho_\varepsilon * u$  è ben definita e di classe  $C^\infty$  su  $\mathbb{R}^n$ .

La stessa conclusione vale più in generale per ogni  $u \in L^1_{\text{loc}}$  se i  $\{\rho_\varepsilon\}$  sono mollificatori di Friedrichs. In questo caso la convoluzione  $\rho_\varepsilon * u$  è ben definita anche per  $u \in C_0(\Omega)$ , per ogni aperto  $\Omega$ , e precisamente  $\rho_\varepsilon * u$  è una famiglia di funzioni di classe  $C^\infty$  con supporto contenuto in un unico compatto  $K \subset\subset \Omega$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Infatti, se il mollificatore  $\rho_\varepsilon(x)$  ha supporto nella palla  $B_\varepsilon$ , si ha  $\text{supp}(\rho_\varepsilon * u) \subseteq \text{supp}(u) + B_\varepsilon$ .

Il seguente teorema giustifica il nome di *regolarizzate* dato alle funzioni  $\{\rho_\varepsilon * u\}$ :

**Teorema 16. [regolarizzazione]**

a) Se  $\{\rho_\varepsilon(x)\}$  è una famiglia di mollificatori si ha (per  $\varepsilon \rightarrow 0$ ):

$$\{\rho_\varepsilon * u\} \xrightarrow{L^p} u \quad \forall u \in L^p, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (8.3)$$

$$\{\rho_\varepsilon * u\} \xrightarrow{\text{punt.}} u \quad \forall u \in \mathcal{C} \cap L^\infty, \quad (8.4)$$

$$\{\rho_\varepsilon * u\} \xrightarrow{L^\infty} u \quad \forall u \in \mathcal{C}_0. \quad (8.5)$$

b) Se  $\{\rho_\varepsilon(x)\}$  sono mollificatori di Friedrichs, si ha:

$$\{\rho_\varepsilon * u\} \xrightarrow{L^p_{\text{loc}}} u \quad \forall u \in L^p_{\text{loc}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\{\rho_\varepsilon * u\} \xrightarrow{L^\infty_{\text{loc}}} u \quad \forall u \in \mathcal{C},$$

$$\{\rho_\varepsilon * u\} \xrightarrow{L^\infty(\Omega)} u \quad \forall u \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

La dimostrazione di questo Teorema si basa su un importante risultato:

**Lemma [continuità in norma  $L^p$ ]** Se  $\tau_h : u(x) \rightarrow u(x-h)$  è la traslazione di vettore  $h \in \mathbb{R}^n$ , per ogni  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $p < \infty$  si ha

$$\{\tau_h u\} \xrightarrow{L^p} u \quad \text{per } |h| \rightarrow 0.$$

Se  $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$  la convergenza  $\{\tau_h u\} \rightarrow u$  vale anche in  $L^\infty$ .<sup>2</sup>

**Osservazione 17.** Questa conclusione non si estende al caso  $p = \infty$ , a meno che  $u(x)$  non sia a priori una funzione *uniformemente continua* su tutto  $\mathbb{R}^n$ , in particolare continua e a supporto compatto.

**Dim. del Lemma** Trattiamo solo nel caso  $p = 1$ : il caso  $1 < p < \infty$  richiede solo piccole modifiche. Supponiamo dapprima che  $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$  cioè  $u$  sia una funzione continua con supporto compatto  $K$ . In tal caso la tesi è facile: infatti, fissato un altro compatto  $\widehat{K}$  contenente l'insieme  $\{x+h : x \in K, |h| \leq 1\}$  (per cui in particolare  $\widehat{K} \supset K$ ), per la continuità della  $u(x)$  abbiamo

$$\sup_{x \in \widehat{K}} |u(x-h) - u(x)| \rightarrow 0 \quad \text{per } |h| \rightarrow 0,$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-h) - u(x)| dx = \int_{\widehat{K}} |u(x-h) - u(x)| dx \leq m(\widehat{K}) \sup_{x \in \widehat{K}} |u(x-h) - u(x)| \rightarrow 0 \quad \text{per } |h| \rightarrow 0.$$

Nel caso generale ( $u \in L^1$ ) ricorriamo al Teor. 10 per approssimare la  $u$  con delle  $\{u_k\} \subset \mathcal{C}_0$  tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{L^1} = 0,$$

e, scrivendo  $\tau_h u - u = \tau_h(u - u_k) + (\tau_h u_k - u_k) + (u_k - u)$ , notiamo che

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1} \leq \|\tau_h(u - u_k)\|_{L^1} + \|\tau_h u_k - u_k\|_{L^1} + \|u_k - u\|_{L^1} = 2\|u_k - u\|_{L^1} + \|\tau_h u_k - u_k\|_{L^1}.$$

<sup>2</sup> Per ogni  $p \leq \infty$ ,  $\tau_h : L^p \rightarrow L^p$  è un operatore lineare isometrico, cioè conserva le norme. La convergenza puntuale  $\{\tau_h u(x)\} \rightarrow u(x)$  per  $h \rightarrow 0$  equivale alla continuità di  $u$ , e la convergenza uniforme equivale all'uniforme continuità di  $u$ , cioè:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ per cui } |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon \text{ se } |x - y| \leq \delta.$$

Ad esempio, se  $u(x) = \sin(x^2)$  si verifica facilmente che, per ogni  $h \in \mathbb{R}$ , risulta  $\|\tau_h u - u\|_{L^1} = 1$ .

Per  $|h| \rightarrow 0$ , avremo allora

$$\maxlim_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h u - u\|_{L^1} \leq 2 \|u_k - u\|_{L^1} + \maxlim_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h u_k - u_k\|_{L^1} = 2 \|u_k - u\|_{L^1}$$

da cui, mandando  $k \rightarrow \infty$ , possiamo concludere che  $\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h u - u\|_{L^1} = 0$ .  $\square$

**Dim. del Teor. 16.** Dimostreremo solo la parte (a), lasciando la (b) come esercizio.<sup>3</sup>

• **Dim. della 8.3.** Trattiamo il caso  $p = 1$ : il caso generale ( $1 \leq p < \infty$ ) richiede piccole modifiche. La dimostrazione ricalca quella del Teorema 15. Per ogni  $u \in L^1$ , posto  $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$ , possiamo scrivere:

$$u_\varepsilon(x) - u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)(u(x-y) - u(x)) dy,$$

quindi per Fubini-Tonelli avremo, per ogni  $\delta > 0$ ,

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &\equiv \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x) - u(x)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y) |u(x-y) - u(x)| dy \right\} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y) - u(x)| dx \right\} dy \\ &= \int_{|y| \leq \delta} \rho_\varepsilon(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y) - u(x)| dx \right\} dy + \int_{|y| > \delta} \rho_\varepsilon(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y) - u(x)| dx \right\} dy. \\ &= \alpha_{\varepsilon, \delta} + \beta_{\varepsilon, \delta}. \end{aligned}$$

Poichè l'integrale di  $\rho_\varepsilon(y)$  sulla palla  $B_\delta$  è minore o uguale a 1, troviamo:

$$\begin{aligned} \alpha_{\varepsilon, \delta} &= \int_{|y| \leq \delta} \rho_\varepsilon(y) \|\tau_y u - u\|_{L^1} dy \leq \sup_{|y| \leq \delta} \|\tau_y u - u\|_{L^1} \int_{|y| \leq \delta} \rho_\varepsilon dy \leq \sup_{|y| \leq \delta} \|\tau_y u - u\|_{L^1} \equiv A_\delta \\ \beta_{\varepsilon, \delta} &\leq \sup_{|y| > \delta} \|\tau_y u - u\|_{L^1} \int_{|y| > \delta} \rho_\varepsilon dy \leq \sup_{|y| > \delta} \left\{ \|\tau_y u\|_{L^1} + \|u\|_{L^1} \right\} \int_{|y| > \delta} \rho_\varepsilon dy = 2 \|u\|_{L^1} \int_{|y| > \delta} \rho_\varepsilon dy \equiv B_{\varepsilon, \delta}. \end{aligned}$$

Ma, grazie al Teor. 8.1,  $\{A_\delta\} \rightarrow 0$  per  $\delta \rightarrow 0$ , mentre per la definizione di mollificatori

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_{\varepsilon, \delta} = 0, \quad \forall \delta > 0;$$

dunque  $\maxlim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon \leq A_\delta + \maxlim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_{\varepsilon, \delta} = A_\delta$ . Mandando  $\delta \rightarrow 0$ , concludiamo che  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = 0$ .  $\square$

• **Dim. della 8.4.** Procedendo come sopra troviamo, in ogni punto  $x \in \mathbb{R}^n$  in cui la  $u$  sia continua,

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y)(u(x-y) - u(x)) dy \right| = \left| \int_{|y| \leq \delta} \dots + \int_{|y| > \delta} \dots \right| \\ &\leq \sup_{|y| \leq \delta} |u(x-y) - u(x)| + 2 \|u\|_{L^\infty} \int_{|y| > \delta} \rho_\varepsilon(y) dy, \end{aligned}$$

per cui mandando prima  $\varepsilon \rightarrow 0$  e poi  $\delta \rightarrow 0$ , concludiamo che  $|u_\varepsilon(x) - u(x)| \rightarrow 0$ .  $\square$

<sup>3</sup> Notiamo soltanto che, supponendo  $\text{supp}(\rho_\varepsilon) \subseteq B_\varepsilon$ , se per una data  $u \in L^p_{\text{loc}}$  indichiamo con  $u_r(x)$  la funzione che vale  $u(x)$  nella palla  $B_r$  e zero altrove, allora la convoluta  $\rho_\varepsilon * u_r$  coincide con  $\rho_\varepsilon * u$  su  $B_{r-\varepsilon}$ .

• **Dim. della 8.5.** Si procede come nel caso della convergenza puntuale, ma ora la funzione  $u(x)$ , essendo nulla fuori di un compatto, è limitata ed uniformemente continua, e quindi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|y| \leq \delta} |u(x-y) - u(x)| \rightarrow 0, \quad \text{per } \delta \rightarrow 0.$$

In conclusione otteniamo che  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x) - u(x)| \rightarrow 0$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , che è la nostra tesi.  $\square$

## 8.2 Problema di Cauchy

**Teorema 17.** *La funzione*

$$U(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

verifica il problema di Cauchy (8.1), dove la condizione iniziale va intesa nel senso che, per  $t \rightarrow 0^+$ ,  $\{U(x, t)\} \rightarrow \delta(x)$  nel senso delle distribuzioni, e cioè:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} U(x, t) \varphi(x) dx = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Si ha poi

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(x, t) dx = 1, \quad \forall t > 0.$$

**Dim.** Abbiamo già verificato che  $U(x, t)$  è una soluzione dell'equazione del calore per  $t > 0$ . Per concludere la dimostrazione basta applicare il Teorema 15 ai mollificatori di Gauss  $\rho_\varepsilon(x) = U(x, \varepsilon)$ .  $\square$

## Conclusioni

Abbiamo provato che funzione

$$U(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}$$

è la *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore, cioè risolve il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} HU(x, t) = 0, & t > 0, \\ U(x, 0) = \delta(x). \end{cases}$$

Per trovare la soluzione del Problema con arbitrario dato iniziale, cioè

$$\begin{cases} Hu(x, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

utilizziamo un procedimento simile a quello usato nella risoluzione dell'equazione di Poisson:

Supponendo che il dato iniziale  $u_0(x)$  non cresca troppo per  $|x| \rightarrow \infty$ , ad esempio che  $u_0$  appartenga a qualche  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , effettuiamo la convoluzione rispetto alle variabili spaziali:

$$u(x, t) = U(x, t) * u_0(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} U(x-y, t) u_0(y) dy. \quad (8.6)$$

Avremo allora

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial U}{\partial t}(x - y, t) u_0(y) dy \\ \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial U}{\partial x_j}(x - y, t) u_0(y) dy \\ \Delta_x u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta U(x - y, t) u_0(y) dy\end{aligned}$$

e quindi

$$Hu(x, t) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} (HU)(x - y, t) u_0(y) dy = 0.$$

Lo stesso ragionamento si applica a qualunque operatore  $H = \partial_t - A(\partial_x)$ , con  $A$  operatore differenziale a coefficienti costanti nelle variabili spaziali  $x \in \mathbb{R}^n$ .

### 8.3 Raccordo col dato iniziale

Dal fatto che, per  $t \rightarrow 0^+$ ,  $\{U(x, t)\} \rightarrow \delta(x)$  nel senso delle distribuzioni, si ricava facilmente (ricordando la (9.19)) che  $\{u(x, t)\} \rightarrow u_0(x)$  sempre nel senso delle distribuzioni. Ci chiediamo se valga una convergenza più forte, in particolare se, dato uno spazio funzionale  $X$ , si possa affermare che

$$\{u(x, t)\} \xrightarrow{X} u_0(x), \quad \forall u_0 \in X \quad (t \rightarrow 0_+). \quad (8.7)$$

In molti casi la risposta è affermativa, ma non sempre: per esempio, la (8.7) non può essere vera per  $X = L^\infty$  se il dato  $u_0(x)$  non è continuo.

Comunque, dato che le funzioni  $\{U(x, \varepsilon)\}$  sono dei mollificatori, il Teorema 16 ci dice che:

- Per ogni dato iniziale  $u_0(x) \in (C \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} u(x, t) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (8.8)$$

- Per ogni dato iniziale  $u_0 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} u(x, t) = u_0(x), \quad \text{unif. su } \mathbb{R}^n.$$

- Per ogni dato iniziale  $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p < \infty$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t) - u_0(x)|^p dx = 0$$

# Capitolo 9

## Equazione delle onde

### 9.1 Formula risolutiva in dimensione tre

Il Problema di Cauchy per l'equazione di d'Alembert *unidimensionale*, cioè su  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$ , si può risolvere in modo esplicito (vedi la formula (5.6)). Consideriamo ora lo stesso Problema in dimensione spaziale  $n$ , e cioè

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (9.1)$$

nello spazio  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ . Anche in questo caso si può dimostrare che la soluzione è unica e trovare di questa un'espressione esplicita, ma il calcolo della soluzione si presenta più complesso.

Tratteremo qui il *caso fisico*  $n = 3$ , nel quale l'equazione di D'Alembert descrive la propagazione della luce. Prima di scrivere la formula risolutiva conviene fare alcune considerazioni:

Indichiamo con  $B_r(x)$  e  $S_r(x)$ , rispettivamente, la palla e la sfera di  $\mathbb{R}^3$  di centro  $x$  e raggio  $r$ , ponendo  $B_r = B_r(0)$ ,  $S_r = S_r(0)$ . Definiamo la *media sferica* di una funzione  $\psi(y) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$\mathcal{M}_\psi(x, r) = \iint_{S_r(x)} \psi(y) dS(y) \equiv \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(x)} \psi(y) dS(y)$$

e notiamo che, posto  $y = x + r\xi$ , per cui  $dS(y) = r^2 dS(\xi)$ , vale l'identità

$$\iint_{S_r(x)} \psi(y) dS(y) = \iint_{S_1} \psi(x + r\xi) dS(\xi). \quad (9.2)$$

Notiamo anche che, come immediata conseguenza della formula di Gauss-Green (6.19), si ha

$$\iint_{S_r(x)} \frac{\partial \psi}{\partial \nu}(y) dS(y) = \iiint_{B_r(x)} \Delta \psi(y) dS(y). \quad (9.3)$$

La (9.2) consente di calcolare la derivata rispetto ad  $r$ , e il Laplaciano rispetto ad  $x$  della media sferica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \iint_{S_r(x)} \psi(y) dS(y) &= \iint_{S_1} \frac{\partial}{\partial r} \psi(x + r\xi) dS(\xi) = \iint_{S_1} \nabla \psi(x + r\xi) \cdot \xi dS(\xi) = \iint_{S_1} \frac{\partial \psi}{\partial \nu}(x + r\xi) dS(\xi) \\ &= \iint_{S_r(x)} \frac{\partial \psi}{\partial \nu}(y) dS(y) = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{B_r(x)} \Delta \psi(y) dy, \end{aligned} \quad (9.4)$$

$$\Delta_x \iint_{S_r(x)} \psi(y) dS(y) = \iint_{S_1} \Delta \psi(x + r\xi) dS(\xi) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(x)} \Delta \psi(y) dS(y). \quad (9.5)$$

**Teorema 18.** [Kirchhoff <sup>1</sup>] Nello spazio  $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$  il Problema (9.1) ha un'unica soluzione, e cioè

$$u(x, t) = \iint_{S_t(x)} \left\{ t\psi(y) + \varphi(y) + t \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y) \right\} dS(y), \quad (9.6)$$

che può anche essere scritta nel modo seguente:

$$u(x, t) = t\mathcal{M}_\psi(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t\mathcal{M}_\varphi(x, t) \right\} \equiv t \iint_{S_r(x)} \psi dS + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t \iint_{S_r(x)} \varphi dS \right\}.$$

**Dimostrazione.**

1. Proviamo che la funzione (9.6) è una soluzione del Problema (9.1):

Trattiamo dapprima il caso particolare  $\varphi = 0$ , nel quale la (9.6) si riduce a

$$u(x, t) = t \iint_{S_t(x)} \psi(y) dS(y). \quad (9.7)$$

Per calcolare le derivate temporali della  $u$ , utilizziamo la (9.4) e la formula (6.20) della co-area:

$$\begin{aligned} u_t &= \iint_{S_t(x)} \psi(y) dS(y) + \frac{1}{4\pi t} \iiint_{B_t(x)} \Delta\psi(y) dy, \\ u_{tt} &= \frac{1}{4\pi t^2} \iiint_{B_t(x)} \Delta\psi(y) dy + \left\{ -\frac{1}{4\pi t^2} \iiint_{B_t(x)} \Delta\psi(y) dy + \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{B_t(x)} \Delta\psi(y) dS(y) \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_t(x)} \Delta\psi(y) dS(y). \end{aligned}$$

Da qui, ricordando che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \iint_{S_r(x)} f(y) dS(y) = \lim_{r \rightarrow 0} \iiint_{B_r(x)} f(y) dy = f(x),$$

per ogni  $f(x)$  continua, vediamo che  $u(x, t)$  verifica le condizioni iniziali  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ . D'altra parte, per la (9.5), abbiamo

$$\Delta_x u = \frac{t}{4\pi t^2} \iint_{S_t(x)} \Delta\psi(y) dS(y),$$

e quindi  $\square u \equiv u_{tt} - \Delta u = 0$ .

Nel caso generale osserviamo che, se  $u_{\varphi, \psi}$  indica la soluzione con dati iniziali  $(\varphi, \psi)$ , possiamo scrivere

$$u_{\varphi, \psi} = u_{\varphi, 0} + u_{0, \psi}, \quad \partial_t u_{0, \varphi} = u_{\varphi, 0}.$$

La prima eguaglianza è ovvia. Per la seconda si noti che  $\square(\partial_t u_{0, \varphi}) = \partial_t(\square u_{0, \varphi}) = 0$ , mentre per  $t = 0$ :

$$(\partial_t u_{0, \varphi})(x, 0) = \varphi(x), \quad [\partial_t(\partial_t u_{0, \varphi})](x, 0) = (\partial_t^2 u_{0, \varphi})(x, 0) = (\Delta u_{0, \varphi})(x, 0) = \Delta 0 = 0.$$

Dunque  $\partial_t u_{0, \varphi}$  è la soluzione del dalembertiano con dato iniziali  $(\varphi, 0)$  e quindi coincide con  $u_{\varphi, 0}$ .

In conclusione

$$u_{\varphi, \psi} = \partial_t u_{0, \varphi} + u_{0, \psi},$$

cioché, usando la (9.4), otteniamo la (9.6).

<sup>1</sup> La formula (9.6) fu trovata da Poisson (~ 1830) ma fu Kirchhoff (~ 1880) a provare che questa funzione è l'unica soluzione del Problema. Più tardi Beltrami (~ 1890) completò e semplificò la dimostrazione di Kirchhoff.

**2.** Proviamo che il Problema (9.1) ha un'unica soluzione :

Per ogni soluzione  $u(x, t)$  del dalembertiano, dopo aver fissato  $x \in \mathbb{R}^n$ , definiamo la funzione

$$V(x, r, t) = \begin{cases} r \iint_{S_r(x)} u(y, t) dS(y) & r > 0, \\ 0 & r = 0, \\ -V(x, -r, t) & r < 0. \end{cases}$$

Notiamo che  $V$  è una funzione continua rispetto alla variabile  $r \in \mathbb{R}$ , anzi derivabile con

$$\left. \frac{\partial V(x, r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = u(x, t). \quad (9.8)$$

Di fatto  $V$  è una funzione di classe  $\mathcal{C}^2$  nelle variabili  $(r, t) \in \mathbb{R}^2$  e, grazie alla (9.4), risulta

$$V_{rr}(x, r, t) = r \iint_{S_r(x)} \Delta u(y, t) dS(y), \quad V_{tt}(x, r, t) = r \iint_{S_r(x)} u_{tt}(y, t) dS(y),$$

cosicchè, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , la funzione  $V(x, r, t)$  verifica l'equazione di d'Alembert nel piano  $(r, t)$ .

All'istante iniziale  $t = 0$  si ha poi:

$$V(x, r, 0) = V_0(x, r), \quad V_t(x, r, 0) = V_1(x, r),$$

dove  $V_0(x, r)$ ,  $V_1(x, r)$  sono le *funzioni dispari* (rispetto ad  $r$ ) definite da :

$$V_0(x, r) = r \iint_{S_r(x)} \varphi(y) dS(y), \quad V_1(x, r) = r \iint_{S_r(x)} \psi(y) dS(y), \quad \text{per } r > 0.$$

Se ora  $\varphi = \psi = 0$ , anche  $V_0(x, r) \equiv V_1(x, r) \equiv 0$ . Ma allora  $V(x, r, t) \equiv 0$ , grazie all'unicità per il problema di Cauchy per il dalembertiano sul piano  $(r, t)$ , e quindi, per la (9.8), anche  $u(x, t) \equiv 0$ .<sup>2</sup>  $\square$

**Osservazione.** Il caso del  $c$ -dalembertiano ( $c > 0$ ) si riduce facilmente al caso  $c = 1$ . Infatti da

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{su } \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (9.9)$$

ponendo

$$u(x, t) = v(x, ct),$$

si passa al problema (9.1) con incognita  $v(x, t)$  e dati iniziali  $(\varphi(x), \psi(x)/c)$ . La soluzione sarà allora :

$$u(x, t) = \iint_{S_{ct}(x)} \left\{ \varphi(y) + ct \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y) + t \psi(y) \right\} dS(y). \quad (9.10)$$

### 9.1.1 Principio di Huygens

Dalla formula (9.6) segue che la soluzione nel punto  $(x, t)$  dipende unicamente dal valore dei dati iniziali sulla sfera di centro  $x$  e raggio  $ct$ . Di conseguenza, nel caso in cui i dati iniziali  $\varphi, \psi$  siano concentrati in un dato punto  $x_0$ , risulta che  $u(x, t) \neq 0$  solo per  $t = |x - x_0|/c$ . In altre parole il supporto della soluzione è contenuto nel *mantello* del cono di  $\mathbb{R}^4$  con vertice nel punto  $(x_0, 0)$  e pendenza  $1/c$ .

E' questo il famoso Principio di Huygens, in assenza del quale non sarebbe possibile la propagazione della luce senza la presenza di riverberi, nè la propagazione del suono senza la presenza di rumori diffusi.

In dimensione 1, la formula risolutiva di d'Alembert (5.6) mostra che il Principio di Huygens è valido solo nel caso in cui  $\psi = 0$ , mentre in dimensione  $n = 2$  tale Principio è sempre falso, come vedremo più avanti. Di fatto, con calcoli più elaborati che per  $n = 3$ , è possibile trovare la formula risolutiva del Problema (9.1) per ogni dimensione  $n$ , e da questa formula risulta che il Principio di Huygens è valido solo per  $n = 3, 5, 7, 9, \dots$

<sup>2</sup> Esplicitando l'espressione della funzione  $V(x, r, t)$  in quanto soluzione, per ogni  $x$ , dell'equazione della corda vibrante sul piano  $(r, t)$  (vedi la (5.4)), e usando la (9.8) per ricavare  $u(x, t)$ , otteniamo un'altra prova dell'esistenza per il problema (9.6).

## 9.2 Stima dell'energia

Un'altra tecnica, molto importante, per dimostrare l'unicità della soluzione di (9.9) (in qualunque dimensione) è il *metodo dell'energia*. L'energia di una data equazione di evoluzione è una funzione

$$E(t) \equiv E(t, u) \geq 0$$

che, per ogni soluzione  $u$  dell'equazione considerata, si mantiene costante o almeno verifica una disequazione differenziale del tipo  $E'(t) \leq CE(t)$ ,  $t \geq 0$ . Avremo allora

$$E(t) \leq E(0) e^{Ct}.$$

In particolare, se  $E(0) = 0$  risulterà  $E(t) = 0$  per ogni  $t \geq 0$ .

Nel caso dell'equazione delle onde su  $\mathbb{R}^n$ , un'energia con queste proprietà è

$$E(t, u) = \frac{1}{2} \int_{B_{\rho(t)}(x_0)} \left\{ |u_t(x, t)|^2 + c^2 |\nabla u(x, t)|^2 \right\} dx, \quad (9.11)$$

dove  $\rho(t)$  è un'opportuna funzione positiva con  $\rho'(t) < 0$ , di fatto sceglieremo  $\rho(t) = \rho_0 - ct$ . Questa è l'*energia locale*, mentre l'*energia globale* si ottiene estendendo l'integrale a tutto  $\mathbb{R}^n$ .

Per semplicità, studiamo dapprima l'energia globale. Supponendo che  $u(x, t)$  sia una soluzione regolare e a supporto compatto in  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $t \geq 0$ , troviamo:

$$E'(t, u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} \left( u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ u_t c^2 \Delta u + c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t \right\} dx = 0$$

dove si è usata la *formula di integrazione per parti*:

$$\int_{\mathbb{R}^n} v \Delta w dx = \int_{\mathbb{R}^n} v \operatorname{div}(\nabla w) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \cdot \nabla w dx, \quad \forall v, w \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n).$$

In questo caso, dunque, l'energia si mantiene costante al variare di  $t$ .

La stima dell'energia locale è più complicata. Supponendo  $x_0 = 0$ , dalla *formula della co-area* otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{B_{\rho(t)}} f(x) dx = \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \int_{B_{\rho(t)}} f(x) dx \right\} \cdot \rho'(t) = \rho'(t) \int_{S_{\rho(t)}} f dS.$$

Possiamo ora calcolare la derivata temporale dell'energia (9.11):

$$\begin{aligned} E'(t, u) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{B_{\rho(t)}} \left( u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 \right) dx \right\} \\ &= \int_{B_{\rho(t)}} \left( u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t \right) dx + \frac{\rho'(t)}{2} \int_{S_{\rho(t)}} \left( u_t^2 + |\nabla u|^2 \right) dS \\ &= c^2 \int_{B_{\rho(t)}} \left( u_t \Delta u + \nabla u \cdot \nabla u_t \right) dx + \frac{\rho'(t)}{2} \int_{S_{\rho(t)}} \left( u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 \right) dS. \end{aligned}$$

D'altra parte, grazie all'identità

$$u_t \Delta u = u_t \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(u_t \nabla u) - \nabla u_t \cdot \nabla u$$

e alla formula di Gauss-Green, troviamo:

$$\int_{B_{\rho(t)}} u_t \Delta u dx = \int_{B_{\rho(t)}} \operatorname{div}(u_t \nabla u) dx - \int_{B_{\rho(t)}} \nabla u_t \cdot \nabla u dx = \int_{S_{\rho(t)}} u_t \nabla u \cdot \nu dS - \int_{B_{\rho(t)}} \nabla u_t \cdot \nabla u dx,$$

e quindi sostituendo nella precedente espressione di  $E'$ ,

$$E'(t, u) = c^2 \int_{S_{\rho(t)}} u_t \nabla u \cdot \nu dS + \frac{\rho'(t)}{2} \int_{S_{\rho(t)}} \left( u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 \right) dS.$$

Dato che  $\rho'(t) = -c$ , troviamo la stima:

$$\begin{aligned} E'(t, u) &\leq c \int_{S_{\rho(t)}} \left\{ c |u_t| |\nabla u| - \frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) \right\} dS \\ &\leq \int_{S_{\rho(t)}} \left\{ \frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) - \frac{1}{2} (|u_t|^2 + c^2 |\nabla u|^2) \right\} dS \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dunque l'energia (9.11) è decrescente al crescere di  $t$ . Da ciò segue l'unicità: se il dato iniziale  $u(x, 0)$  è nullo su una qualche palla  $B_{\rho_0}(x)$ , la soluzione  $u(x, t)$  resta nulla sul cono di base  $B_{\rho_0}(x)$  e pendenza  $1/c$ .

**Osservazione 18.** Con calcoli analoghi si può trattare il caso più generale delle equazioni iperboliche

$$u_{tt} - \operatorname{div}(a(x)\nabla u) = 0 \quad (9.12)$$

dove  $a(x) \equiv [a_{ij}(x)]$  è una matrice  $n \times n$  *simmetrica e semi-definita positiva*, nel senso che

$$\langle a(x)V, W \rangle = \langle a(x)W, V \rangle, \quad 0 \leq \langle a(x)V, V \rangle \leq \Lambda_0 |V|^2, \quad \forall V, W \in \mathbb{R}^n.$$

In questo caso l'energia è

$$E(t, u) = \frac{1}{2} \int_{B_{\rho(t)}} \left\{ |u_t(x, t)|^2 + \langle a(x)\nabla u(x, t), \nabla u(x, t) \rangle \right\} dx, \quad \rho(t) = \rho_0 - t\sqrt{\Lambda_0},$$

e il cono di determinazione ha pendenza  $1/\sqrt{\Lambda_0}$ . Si ottiene ancora  $E'(t, u) \leq 0$ .

### 9.3 Formula di Kirchhoff in dimensione due

Partendo dalla formula di Kirchhoff in dimensione  $n = 3$ , possiamo ottenere la formula risolutiva nel caso di due variabili spaziali:

**Teorema 19.** La soluzione del Problema di Cauchy (9.1) in  $\mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t$  è espressa dalla formula

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{B_t(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{B_t(x)} \frac{\varphi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy. \quad (9.13)$$

dove  $B_t(x)$  è il disco di  $\mathbb{R}^2$  di centro  $x$  e raggio  $t$ .

**Dim.** Dato che

$$u \equiv u_{\varphi, \psi} = u_{0, \psi} + \partial_t u_{0, \varphi}$$

possiamo limitarci a trattare il caso  $\varphi = 0$ . Applichiamo il *metodo della cascata*, osservando che la funzione

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) \equiv u(x_1, x_2, t)$$

è la soluzione del dalembertiano in  $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$  con dati iniziali

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, 0) = 0, \quad \tilde{u}_t(x_1, x_2, x_3, 0) = \psi(x_1, x_2).$$

Per la (9.7) abbiamo allora:

$$u(x_1, x_2, t) \equiv \tilde{u}(x_1, x_2, 0, t) = \frac{1}{4\pi t} \iint_{\tilde{S}_t(x_1, x_2, 0)} \psi(y_1, y_2) dS(y_1, y_2, y_3),$$

dove  $\tilde{S}_t(x_1, x_2, 0)$  è la sfera di  $\mathbb{R}^3$  di raggio  $t$  e centro  $(x_1, x_2, 0)$  e  $(y_1, y_2, y_3) \in S_t(x_1, x_2, 0)$ .

Per arrivare alla (9.13) basta eseguire la traslazione  $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2)$  ed utilizzare l'identità

$$\iint_{\{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = t^2\}} f(\xi_1, \xi_2) dS(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 2t \iint_{\{\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq t^2\}} f(\xi_1, \xi_2) \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{t^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2)}}, \quad (9.14)$$

che segue dal calcolo dell'integrale di una funzione su una superficie *di tipo grafico* (vedi la (6.9) dove ora la funzione  $g(x, y, z)$  è indipendente da  $z$ ).  $\square$

**Osservazione 19.** Dalla formula (9.13) si deduce il fenomeno di Huygens non è valido nel caso bidimensionale: la soluzione nel punto  $(x, t)$  dipende dal valore dei dati iniziali sul disco pieno  $B_t(x)$  che è la base del cono di determinazione di vertice  $(x, t)$ , e non solo dal loro valore sul bordo di tale disco.

## 9.4 Principio di Duhamel

Il Problema di Cauchy per un'equazione di evoluzione del I ordine a coefficienti indipendenti dalla variabile temporale può essere scritto nella *forma astratta*:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & (t > 0) \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \quad (9.15)$$

dove  $A$  è un operatore differenziale rispetto alle variabili spaziali  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Il principio di Duhamel consente di ricondurre il problema non omogeneo (9.15) ad un problema *omogeneo* dello stesso tipo.

A questo scopo consideriamo, per ogni fissato  $s \in [0, t]$ , il Problema

$$\begin{cases} w'(t) = Aw(t) & (t > 0) \\ w(0) = f(s) + A\varphi \end{cases} \quad (9.16)$$

e indichiamone con  $w(t) \equiv w(t; s)$  la soluzione. Possiamo allora verificare che la funzione

$$u(t) = \varphi + \int_0^t w(t-s; s) ds$$

risolve il Problema (9.15): infatti  $u(0) = \varphi$ , mentre

$$\begin{aligned} u'(t) &= w(0; t) + \int_0^t w'(t-s; s) ds = f(t) + A\varphi + \int_0^t Aw(t-s; s) ds \\ &= f(t) + A\varphi + A \int_0^t w(t-s; s) ds = f(t) + Au(t). \end{aligned}$$

In modo analogo si tratta il caso di un'equazione astratta del II ordine del tipo

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + f(t) & (t > 0) \\ u(0) = \varphi \\ u'(0) = \psi. \end{cases} \quad (9.17)$$

In tal caso consideriamo, per ogni  $s \in [0, t]$ , il problema

$$\begin{cases} w''(t) = Aw(t) & (t > 0) \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = f(s) + A\varphi + tA\psi, \end{cases} \quad (9.18)$$

indicandone con  $w(t) \equiv w(t; s)$  la soluzione, e verifichiamo che la soluzione di (9.17) è la funzione

$$u(t) = \varphi + t\psi + \int_0^t w(t-s; s) ds. \quad (9.19)$$

Si ha infatti  $u(0) = \varphi$ , mentre

$$u'(t) = \psi + w(0; t) + \int_0^t w'(t-s; s) ds = \psi + \int_0^t w'(t-s; s) ds.$$

In particolare  $u'(0) = \psi + w'(0; t) = \psi$  e quindi

$$u''(t) = w'(0; t) + \int_0^t w''(t-s; s) ds = f(t) + A\varphi + tA\psi + A \int_0^t w(t-s; s) ds = f(t) + Au(t).$$

Applichiamo ora il procedimento di Duhamel al caso concreto del problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, t) & \text{in } \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t^+ \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (9.20)$$

Se indichiamo con  $w(x, t) \equiv w(x, t; s)$  la soluzione del problema

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) = \Delta w(x, t) & (t > 0) \\ w(x, 0) = 0 \\ w_t(x, 0) = f(x, s), \end{cases} \quad (9.21)$$

dalla formula di Kirchhoff otteniamo:

$$w(x, t; s) = \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_t(x)} f(y, s) dS(y).$$

Per la (9.19) (utilizzando nell'ultimo passaggio la formula della co-area) avremo allora

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \frac{1}{t-s} \iint_{S_{t-s}(x)} f(y, s) dS(y) ds = \frac{1}{4\pi} \int_0^t \iint_{S_\tau(x)} \frac{f(y, t-\tau)}{\tau} dS(y) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \iint_{S_\tau(x)} \frac{f(y, t-|x-y|)}{|x-y|} dS(y) d\tau = \frac{1}{4\pi} \iiint_{B_t(x)} \frac{f(y, t-|x-y|)}{|x-y|} dy, \end{aligned}$$

ovvero

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\{r \leq t\}} \frac{f(y, t-r)}{r} dy, \quad \text{dove } r = |x-y|. \quad (9.22)$$

La (9.22) viene chiamata formula del *potenziale ritardato* in quanto è simile all'espressione (7.9) del potenziale elettrostatico in presenza di una sorgente  $f(x, t)$  variabile nel tempo, e cioè

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y, t)}{r} dy \quad (r = |x-y|),$$

con la differenza che ora il potenziale al tempo  $t$  dipende dalla sorgente al tempo precedente  $t-r$ .



# Capitolo 10

## Spazi di Sobolev

### 10.1 Teorema di Riemann-Lebesgue

**Teorema 20.** Una funzione  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

è quasi-ovunque nulla su  $\Omega$ .

**Dim.** Cominciamo con l'assumere un'ipotesi un pò più forte di quella dell'enunciato e cioè che per ogni  $S \subset\subset \Omega$  misurabile

$$\int_S f\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega). \quad (10.1)$$

In tal caso, ricorrendo al Lemma 2.3 parte (ii), è facile concludere che

$$\int_S f dx \equiv \int_{\Omega} f\chi_S dx = 0 \quad \forall S \subset\subset \Omega \text{ misurabile}$$

e quindi che  $f(x) = 0$  quasi-ovunque su  $\Omega$ . Infatti, per ogni  $S \subset\subset \Omega$  si può costruire una successione  $\{\varphi_\varepsilon\}$  di funzioni continue a supporto compatto in modo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f\varphi_\varepsilon dx = \int_{\Omega} f\chi_S dx \quad \forall f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

Per concludere la Dim. resta da mostrare che, se la (10.1) vale per ogni  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ , essa vale per ogni  $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ . Ciò segue dalla tecnica dei mollificatori (Teor. 16): ogni  $\varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega)$  può essere approssimata in  $L^\infty$  con una successione di funzioni  $\{\psi_j\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  con supporti contenuti in un compatto  $K \subset \Omega$ .  $\square$

### 10.2 Derivate deboli

Il più comune spazio di Sobolev è quello delle funzioni (reali o complesse) di quadrato sommabile su  $\mathbb{R}$  la cui derivata è a sua volta una funzione di quadrato sommabile:

$$H^1(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}): u' \in L^2(\mathbb{R})\},$$

In questa definizione si deve però utilizzare la nozione di *derivata debole*.

#### Notazioni

Per ogni aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , definiamo lo spazio vettoriale  $\mathcal{D}(\Omega) \equiv \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  formato dalle funzioni di classe  $\mathcal{C}^\infty$  a supporto compatto in  $\Omega$ . Scriveremo  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definizione 12. [ derivate deboli ]** Date due funzioni  $u, f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , si dice che

$$\partial_j u = f \quad (\text{deb}) \quad \text{su } \Omega,$$

se

$$\int_{\Omega} u \partial_j \varphi \, dx = - \int_{\Omega} f \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Più in generale, data una derivazione  $\partial^\alpha$  di ordine  $|\alpha| = m$ , si dice che

$$\partial^\alpha u = f \quad (\text{deb}) \quad \text{su } \Omega$$

se

$$\int_{\Omega} u \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^m \int_{\Omega} f \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Osservazione 20.** Quando una funzione  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  non ha derivate deboli in  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , possiamo effettuare le derivate nel senso delle distribuzioni, identificando  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  ad un sottospazio dello spazio  $\mathcal{D}'(\Omega)$  delle distribuzioni. In  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , le derivate  $\partial^\alpha u$  (di qualunque ordine) esistono sempre.

**Definizione 13. [ spazio  $H^1(\Omega)$  ]** Per ogni aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  definiamo lo spazio vettoriale

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \text{esistono le derivate deboli } \partial_j u \in L^2(\Omega), j = 1, \dots, n \right\},$$

che diventa uno spazio di Hilbert col prodotto scalare (e relativa norma):

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} u \bar{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}.$$

## Proprietà

1. Se  $u \in C^1(\Omega)$ , le derivate classiche  $\partial_1 u, \dots, \partial_n u$  sono anche derivate deboli.

Data  $\varphi \in C_0^1(\Omega)$  fissiamo un aperto  $D \subset\subset \Omega$  in modo che  $\text{supp}(\varphi) \subset D$ . Per Gauss-Green, indicando con  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  la normale esterna a  $D$ , troviamo allora:

$$\int_{\Omega} \left\{ u \partial_j \varphi + \varphi \partial_j u \right\} dx = \int_D \left\{ u \partial_j \varphi + \varphi \partial_j u \right\} dx = \int_{\partial D} u \varphi \nu_j \, dS = 0.$$

2. La derivata debole (quando esiste) è unica

Siano  $u, f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  tali che  $\partial_j u = f$  (deb) e  $\partial_j u = g$  (deb) su  $\Omega$ . Per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  si ha allora

$$\int_{\Omega} (f - g) \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx - \int_{\Omega} g \varphi \, dx = - \int_{\Omega} u \partial_j \varphi \, dx + \int_{\Omega} u \partial_j \varphi \, dx = 0$$

e quindi, per il Teor. di Riemann-Lebesgue,  $f - g = 0$  quasi-ovunque su  $\Omega$ .

3. Per le derivate deboli vale la formula di Schwarz:  $\partial^\alpha \partial^\beta u = \partial^\beta \partial^\alpha u \equiv \partial^{\alpha+\beta} u$ .

Se  $\partial^\beta u = w$  (deb) e  $\partial^\alpha w = f$  (deb) su  $\Omega$ , per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  si ha

$$\int_{\Omega} f \varphi \, dx = (-1)^\alpha \int_{\Omega} w \partial^{|\alpha|} \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} u \partial^\beta \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_{\Omega} u \partial^{\alpha+\beta} \varphi \, dx.$$

4. Se  $\partial^\alpha u = f$  (deb) su  $\Omega$ , allora  $\partial^\alpha u = f$  (deb) su ogni sottoinsieme aperto  $\omega \subset \Omega$ .

Basta notare che  $\mathcal{D}(\omega)$  può essere visto in modo naturale come un sottospazio di  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

5. Siano  $u, f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ ,  $I$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ , e sia  $x_0 \in I$ . Allora  $u' = f$  (deb) su  $I$  se e solo se

$$u(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + \text{costante}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In particolare, se  $u' = 0$  (deb) su  $I$ ,  $u$  è (q.o.) costante.

Se poi  $u, f \in L^1(\mathbb{R})$ , e  $u' = f$  (deb) su  $\mathbb{R}$ , allora

$$u(x) = - \int_x^\infty f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (10.2)$$

Per la dimostrazione si rimanda alla Sezione 10.4.

6. In dimensione  $n$  vale una formula simile alla (10.2): dati  $u, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  si ha l'implicazione

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = f \text{ (deb) su } \mathbb{R}^n \implies u(x) = (-1)^n \int_{Q^+(x)} f(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (10.3)$$

dove l'integrale si effettua sul "quadrante" di  $\mathbb{R}^n$

$$Q^+(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y_1 \geq x_1, \dots, y_n \geq x_n \right\}.$$

Per la dimostrazione si rimanda alla Sezione 10.5.

## 10.3 Spazi di Sobolev: definizione ed esempi

**Definizione 14.** Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  ed ogni  $p \in [1, \infty]$  definiamo lo spazio di Banach

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq k, \exists f_\alpha \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) : \partial^\alpha u = f_\alpha \text{ (deb) su } \Omega \right\},$$

con la norma <sup>1</sup>

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Per  $p = 2$ , otteniamo lo spazio di Hilbert

$$H^k(\Omega) \equiv W^{k,2}(\Omega), \quad (u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \overline{\partial^\alpha v} dx.$$

Si definisce poi lo spazio vettoriale

$$W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega) = \left\{ u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) : u \in W^{k,p}(\omega) \quad \forall \omega \subset\subset \Omega \right\}.$$

---

<sup>1</sup> Se  $p < \infty$ , una norma equivalente è  $\left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right\}^{1/p}$ .

**Proposizione 13.** *Lo spazio  $W^{k,p}(\Omega)$  è completo.*

**Dim.** Trattiamo solo il caso particolare dello spazio  $H^1 \equiv H^1(\Omega)$  (la dimostrazione nel caso generale è analoga). Omettiamo per brevità di scrivere  $\Omega$ . Se  $\{u_k\}$  una successione di Cauchy in  $H^1$  si ha

$$\|u_h - u_k\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad \|\partial_j u_h - \partial_j u_k\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad h, k \rightarrow \infty,$$

quindi, grazie alla completezza di  $L^2$ , esistono  $n + 1$  funzioni  $u, f_1, \dots, f_n \in L^2$ , tali che, per  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\{u_k\} \xrightarrow{L^2} u, \quad \{\partial_j u_k\} \xrightarrow{L^2} f_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Se dimostriamo che  $\partial_j u = f_j$  (deb) abbiamo concluso. Ora, per ogni  $k$  ed ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , si ha

$$\int_{\Omega} \varphi \partial_j u_k dx = - \int_{\Omega} u_k \partial_j \varphi dx,$$

e da qui, passando al limite per  $k \rightarrow \infty$ , conseguiamo la tesi.  $\square$

## Esempi

1. La funzione di Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{su } \{x < 0\} \\ 1 & \text{su } \{x \geq 0\} \end{cases}$$

appartiene allo spazio  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  ma non a  $W^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Derivando si trova infatti che

$$H'(x) = \begin{cases} 0 & \text{su } \{x < 0\} \\ 0 & \text{su } \{x > 0\}, \end{cases}$$

quindi, se  $H(x)$  avesse una derivata debole  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , questa dovrebbe essere nulla sia su  $\{x < 0\}$  che su  $\{x > 0\}$ , e quindi quasi ovunque nulla. Ma ciò è impossibile dato che  $H(x)$  non è costante.<sup>2</sup>

2. La *funzione di Cantor* è una funzione  $u: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  (costruita a partire dall'insieme di Cantor) che è continua in ogni punto, debolmente crescente e quasi-ovunque derivabile con derivata nulla. La funzione nulla non è però la derivata debole di  $u(x)$ , perchè in tal caso  $u$  risulterebbe costante.

3. La funzione

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

appartiene a  $W^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  e  $u' = H$  (deb) su  $\mathbb{R}$ . Infatti per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , integrando per parti, si trova

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \varphi' dx = \int_0^{\infty} x \varphi' dx = - \int_0^{\infty} \varphi dx = \int_{-\infty}^{\infty} H \varphi dx.$$

4. Per ogni intervallo aperto  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  contenente l'origine si ha

$$\log |x| \in L^1(a, b) \setminus W^1(a, b),$$

cioè  $u(x)$  è sommabile su  $(a, b)$  ma non esiste alcuna funzione  $f \in L^1(a, b)$  per cui

$$\int_a^b \log |x| \varphi'(x) dx = - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Se infatti tale  $f$  esistesse, ponendoci nell'aperto  $(a, b) \setminus \{0\}$  sul quale  $u \in \mathcal{C}^1$ , risulterebbe  $f(x) = 1/x$  per  $x \neq 0$ , il che esclude che  $f(x)$  possa essere sommabile in un intorno di 0.<sup>3</sup>

<sup>2</sup> Vedremo più avanti che  $H'(x) = \delta(x)$  nel senso delle distribuzioni.

<sup>3</sup> Vedremo più avanti che, indicando con  $\mathcal{P}(1/x)$  il *valor principale* di  $1/x$ , risulta nel senso delle distribuzioni

$$(\log |x|)' = \mathcal{P}(1/x).$$

5. Se  $n \geq 2$ , per ogni palla aperta  $B_R \subset \mathbb{R}^n$  di centro l'origine si ha

$$\log |x| \in W^{1,1}(B_R).$$

Si ha infatti, per ogni  $j = 1, \dots, n$ ,

$$\partial_{x_j} \log |x| = \frac{1}{r} \frac{x_j}{|x|} \equiv f_j(x) \quad \text{sull'aperto } B_R \setminus \{0\},$$

e le  $f_j$  sono funzioni sommabili su  $B_R$ . Per asserire che queste sono le derivate deboli di  $u(x) \equiv \log |x|$  su  $B_R$  proviamo che

$$\int_{B_R} u \partial_j \varphi \, dx = - \int_{B_R} f_j \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(B_R). \quad (10.4)$$

A questo scopo ricorriamo alla formula Gauss-Green per ottenere:

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon^c} u \partial_j \varphi \, dx &= \int_{B_\varepsilon^c} \partial_j(u\varphi) \, dx - \int_{B_\varepsilon^c} \varphi \partial_j u \, dx = - \int_{S_\varepsilon} u(x) \varphi(x) \frac{x_j}{|x|} \, dS(x) - \int_{B_\varepsilon^c} \varphi \partial_j u \, dx \\ &= - \log \varepsilon \int_{S_\varepsilon} \varphi(x) \frac{x_j}{|x|} \, dS(x) - \int_{B_\varepsilon^c} \varphi \partial_j u \, dx \equiv \alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon, \end{aligned}$$

dove  $B_\varepsilon^c = B_R \setminus B_\varepsilon$ ,  $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$ . Per  $\varepsilon \rightarrow 0$  troviamo la (10.4): infatti  $|\alpha_\varepsilon| \leq C\varepsilon^{n-1} \log \varepsilon$ , quindi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\alpha_\varepsilon + \beta_\varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta_\varepsilon = - \iint_{B_R} \varphi \partial_j u \, dx = - \iint_{B_R} \varphi f_j \, dx.$$

6. Se  $n \geq 2$ , per ogni palla aperta  $B_R \subset \mathbb{R}^n$  di centro l'origine e raggio  $R < 1$ , si ha

$$\log \log \frac{1}{|x|} \in H^1(B_1).$$

Per verificare questo fatto, consideriamo il caso generale di una funzione radiale di  $n$  variabili

$$u(x) = U(r), \quad r = |x|,$$

con  $U(r)$  funzione di classe  $\mathcal{C}^1$  per  $0 < r < R$ . In tal caso le funzioni continue  $u(x)$  e  $\nabla u(x)$  sono di quadrato sommabile su  $B_R \setminus \{0\}$  se e solo se

$$\int_0^R \{U(r)^2 + U'(r)^2\} r^{n-1} \, dr < \infty. \quad (10.5)$$

Procedendo come nell'esempio 5, per concludere che  $u \in H^1(B_R)$  basta mostrare che

$$\lim_{r \rightarrow 0} U(r) r^{n-1} = 0, \quad (10.6)$$

e la funzione  $U(r) = \log \log(1/r)$  verifica entrambe le condizioni (10.5) e (10.6).

**Esercizio** *Provare che la funzione su  $\mathbb{R}^2$  definita da:*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{sul quadrante } \{x \in \mathbb{R}^2: x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

non appartiene a  $W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ . Si noti che  $u(x) = H(x_1)H(x_2)$ .

## 10.4 Spazi di Sobolev in una variabile

**Teorema 21.** Siano  $u, f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ , con  $I$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ , e sia  $x_0 \in I$ . Allora

$$u' = f \text{ (deb) su } I \iff u(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + C \text{ per qualche costante } C \equiv C(x_0). \quad (10.7)$$

Da questo Teorema si ricavano facilmente i seguenti corollari:

**Corollario 1.** Se  $u' = f$  (deb) su  $\mathbb{R}$ , con  $u, f \in L^1(\mathbb{R})$ , allora

$$u(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = - \int_x^{\infty} f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (10.8)$$

**Dim.** Dalla (10.7) segue che la funzione  $u(x)$  ha limiti finiti, diciamo  $L_+$  ed  $L_-$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ , ed essendo  $u$  integrabile su  $\mathbb{R}$  dev'essere  $L_+ = L_- = 0$ . Mandando  $x \rightarrow +\infty$  vediamo allora che la costante  $C(x_0)$  coincide con l'integrale di  $f$  su  $[x_0, +\infty[$  cambiato di segno, e da ciò si ricava subito la (10.8).  $\square$

**Corollario 2.** Ogni  $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(I)$  è continua su  $I$ . Se poi  $u \in W^{1,1}(I)$ ,  $u$  è continua anche su  $\bar{I}$ .

**Corollario 3.** Ogni  $u \in H^1(I)$  è una funzione hölderiana di esponente  $1/2$ , cioè verifica

$$|u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^{1/2}, \quad \text{con } C = \|f\|_{L^2(I)}.$$

Proviamo ora il Teor. 21 nel caso  $I = \mathbb{R}$  (il caso generale è analogo). La dimostrazione si basa su alcuni Lemmi:

**Lemma 1.** Ogni funzione  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  tale che  $u' \equiv 0$  (deb) su  $\mathbb{R}$  è (quasi-ovunque) costante.

**Lemma 2.** Se  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , la funzione (continua)

$$v(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (10.9)$$

verifica  $v' = f$  (deb) su  $\mathbb{R}$ .

**Dim. del Lemma 1.** Porremo qui  $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Dire che  $u' = 0$  (deb) su  $\mathbb{R}$ , significa che

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \varphi' dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \psi dx = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D} \text{ tale che } \psi = \varphi' \text{ per qualche } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ora osserviamo che, se una funzione  $\psi \in \mathcal{D}$  ha supporto nell'intervallo  $[-R, R]$ , la sua primitiva

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$$

è una funzione  $C^\infty$  che è nulla sulla semiretta sinistra  $]-\infty, -R]$  ed è costantemente uguale all'integrale di  $\psi$  su  $\mathbb{R}$  sulla semiretta destra  $[R, +\infty[$ . Dunque  $\varphi$  ha supporto compatto se e solo se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0.$$

Di conseguenza, nelle nostre ipotesi, la funzione  $u(x)$  è *ortogonale* (nel prodotto scalare di  $L^2$ ) all'iperpiano  $\mathcal{H}$  formato dalle funzioni che hanno integrale 0, cioè sono ortogonali alla funzione costante 1. D'altra parte, scelta arbitrariamente una  $\varphi_0 \in \mathcal{D}$  con integrale 1, possiamo spezzare ogni  $\varphi \in \mathcal{D}$  nella somma

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

dove

$$\varphi_1 = \varphi - \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx \right) \varphi_0 \in \mathcal{H}, \quad \varphi_2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx \right) \varphi_0.$$

Per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}$  avremo allora, dato che  $u$  è ortogonale a  $\varphi_1$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \varphi dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u \varphi_1 dx}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} u \varphi_2 dx = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx \right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u \varphi_0 dx}_{\lambda_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_0 \varphi dx,$$

da cui per il Teorema di Riemann-Lebesgue (Teor. 20) concludiamo che  $u(x) \equiv \lambda_0$  quasi-ovunque.  $\square$

**Dim. del Lemma 2.** Supponendo per semplicità  $x_0 = 0$ , dobbiamo provare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^x f(t) dt \right\} \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Applicando il Teor. di Fubini-Tonelli al *doppio cono*  $T_1 \cup T_2$ , dove

$$T_1 = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq t \leq x \right\}, \quad T_2 = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, x \leq t \leq 0 \right\},$$

troviamo allora:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^x f(t) dt \right\} \varphi'(x) dx &= \iint_{T_1} f(t) \varphi'(x) dx dt - \iint_{T_2} f(t) \varphi'(x) dx dt \\ &= \int_0^{+\infty} dt \int_t^{+\infty} f(t) \varphi'(x) dx - \int_{-\infty}^0 dt \int_{-\infty}^t f(t) \varphi'(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) (-\varphi(t)) dt - \int_{-\infty}^0 f(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad \square$$

**Dim. del Teor. 21.** Sia  $u' = f$  (deb). Se  $v(x)$  è la funzione (10.9), sappiamo dal Lemma 2 che anche  $v' = f$  (deb), quindi  $(u - v)' = 0$  (deb). Ma allora, per il Lemma 1,  $u - v$  è costante.  $\square$

**Definizione 15. [funzioni assolutamente continue]** Una funzione  $u(x)$  definita su un intervallo reale  $I$  è *assolutamente continua* se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste qualche  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $N$ -pla di sottointervalli,  $[x_1, x'_1], [x_2, x'_2], \dots, [x_N, x'_N]$ , due a due disgiunti, risulta

$$\sum_{j=1}^N |x'_j - x_j| \leq \delta \quad \implies \quad \sum_{j=1}^N |u(x'_j) - u(x_j)| \leq \varepsilon.$$

Se ci si limita al caso  $N = 1$  si ritrova la definizione di *funzione uniformemente continua*.

La funzione di Cantor non è ass. continua. Grazie al Teor. 3 vediamo che ogni  $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R})$ , cioè del tipo (10.7), è ass. continua. Si dimostra che vale anche il viceversa: ogni funzione ass. continua sta in  $W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R})$ .

## 10.5 Teoremi di immersione di Sobolev

Sono una serie di teoremi fondamentali che mostrano come dalla *regolarità debole* di una data funzione, cioè l'appartenenza a qualche classe di Sobolev  $W^{k,p}$  con  $k$  sufficientemente alto, consegua la sua *regolarità forte* con la perdita di un certo numero di derivate. Precisamente, per ogni  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , si ha

**Teorema 22. [Sobolev]** Per ogni  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , si hanno le immersioni continue <sup>4</sup>

$$W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega) \quad \text{non appena} \quad k > \frac{n}{p}, \quad (10.10)$$

e più in generale:

$$W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^\nu(\Omega) \quad \forall k > \frac{n}{p} + \nu.$$

In particolare, per gli spazi di Sobolev hilbertiani risulta:

$$H_{\text{loc}}^k(\Omega) \subset \mathcal{C}^\nu(\Omega) \quad \forall k > \frac{n}{2} + \nu.$$

Il numero reale  $k - n/p$  è l'*ordine di regolarità* dello spazio  $W^{k,p}$ . La (10.10) afferma che gli spazi di Sobolev con ordine di regolarità positivo si immergono con continuità nello spazio delle funzioni continue.

**Osservazione 21.** La condizione  $k > n/p$  è quasi *ottimale* nel senso che se  $k < n/p$  l'immersione (10.10) non è più valida. Questo fatto si prova con un *procedimento di riscalatura*: supponendo per semplicità  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , per ogni  $u \in W^{k,p}$  definiamo le funzioni

$$u_\varepsilon(x) = u(x/\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Se  $n/p - k > 0$ , si ha allora

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(B_R)} &= \|u\|_{L^\infty(B_{R/\varepsilon})} \geq \|u\|_{L^\infty(B_R)} \quad \forall R > 0, \\ \|\partial^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p} &= \varepsilon^{n/p - |\alpha|} \|\partial^\alpha u\|_{L^p} \leq \varepsilon^{n/p - k} \|u\|_{W^{k,p}} \quad \forall |\alpha| \leq k, \end{aligned}$$

e quindi, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la successione  $\{u_\varepsilon\}$  tende a zero in  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ , ma non tende a zero in  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ .

Per quanto riguarda i casi limite, cioè quelli in cui  $k = n/p$ , la situazione è variegata: l'immersione (10.10) non è valida in generale, ma in qualche caso speciale lo è. Ad esempio per  $k = n$ , e  $p = 1$ , si ha

$$W_{\text{loc}}^{n,1}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega). \quad (10.11)$$

La (10.11) è una facile conseguenza dell'identità (10.3) che verrà dimostrata in seguito (Cor. 2 del Teor. 23).

## 10.6 Convoluzione e derivate deboli

Sia  $\{\rho_\varepsilon\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  una famiglia di mollificatori di Friedrichs, cioè funzioni nulle fuori della palla  $B_\varepsilon$  e aventi integrale 1. Per ogni  $u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$  possiamo fare la convoluzione

$$u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$$

ottenendo una funzione  $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 23. [derivate e mollificatori]** Siano  $u, f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$  tali che  $\partial_j u = f$  (deb). Allora:

$$\partial_j(u * \rho_\varepsilon) = f * \rho_\varepsilon.$$

Per quanto già visto in precedenza si ha anche

$$\partial_j(u * \rho_\varepsilon) = u * (\partial_j \rho_\varepsilon) = (\partial_j u) * \rho_\varepsilon,$$

dove le derivate nei primi due termini sono classiche, mentre quella nel terzo termine è una derivata debole.

<sup>4</sup> La continuità significa che, se per ogni  $|\alpha| \leq k$  si ha  $\{\partial^\alpha u_k\} \rightarrow 0$  in  $L^p$  su ogni compatto di  $\Omega$ , allora  $\{u_k\} \rightarrow 0$  uniformemente su ogni compatto di  $\Omega$ .

**Dim.** Partendo da

$$\partial_{x_j}(u * \rho_\varepsilon)(x) = \partial_{x_j} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \rho_\varepsilon(x-y) dy \right\} = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \partial_{x_j} \left\{ \rho_\varepsilon(x-y) \right\} dy.$$

e ricordando ora che  $\partial_j u(y) = f(y)$  (deb) se e solo se

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(y) \partial_{y_j} \varphi(y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(y) dy, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

troviamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(y) \partial_{x_j} \left\{ \rho_\varepsilon(x-y) \right\} dy = - \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \partial_{y_j} \left\{ \rho_\varepsilon(x-y) \right\} dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \rho_\varepsilon(x-y) dy = (f * \rho_\varepsilon)(x).$$

□

**Corollario 1.** Per ogni  $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  con  $p < \infty$  risulta:

$$\{u * \rho_\varepsilon\} \xrightarrow{W^{k,p}} u \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0.$$

**Dim.** Grazie al Teor. 16 sappiamo che

$$\{v * \rho_\varepsilon\} \xrightarrow{L^p} v, \quad \forall v \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

quindi, applicando ciò alla  $u$  e alle sue derivate deboli  $\partial_1 u, \dots, \partial_n u$ , e ricordando il Teor. 23, troviamo

$$\{u * \rho_\varepsilon\} \xrightarrow{L^p} u, \quad \{\partial_j(u * \rho_\varepsilon)\} \equiv \{\partial_j u * \rho_\varepsilon\} \xrightarrow{L^p} \partial_j u.$$

Iterando questo procedimento sino ad arrivare alle derivate deboli di ordine  $k$ , si ottiene la tesi. □

**Corollario 2.** Ogni funzione  $u \in W^{n,1}(\mathbb{R}^n)$  verifica l'identità (10.3).

**Dim.** Se  $u(x)$  è una funzione di classe  $C^n$ , con  $(\partial_1 \dots \partial_n) u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , la (10.3) è un'immediata conseguenza di Fubini-Tonelli. Dunque per ognuna delle funzioni regolarizzate  $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$ , risulta

$$u_\varepsilon(x) = (-1)^n \int \dots \int_{Q^+} (\partial_1 \dots \partial_n) u_\varepsilon(y) dy,$$

e, passando al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , si consegue la tesi. □

**Corollario 3.** Se  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  è tale che  $\partial_j u \equiv 0$  (deb) per  $j = 1, \dots, n$ , allora  $u(x)$  è costante.

**Dim.** Per ogni  $j$  si ha  $\partial_j u_\varepsilon = \partial_j u * \rho_\varepsilon = 0 * \rho_\varepsilon \equiv 0$ , e quindi la funzione (regolare)  $u_\varepsilon(x)$  è costante. D'altra parte  $\{u_\varepsilon\} \rightarrow u$  in  $L^1_{\text{loc}}$  e quindi la funzione  $u(x)$ , in quanto limite di costanti, è a sua volta costante. □

## 10.7 Gli spazi $H_0^k(\Omega)$

Se ci si pone su tutto  $\mathbb{R}^n$ , vale il

**Teorema 24. [densità]** Ogni  $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ , con  $1 \leq p < \infty$ , è limite in  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  di una successione di funzioni  $u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . In particolare, per  $p = 2$ , si ha che

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ è denso in } H^k(\mathbb{R}^n).$$

**Dimostrazione:** Dal Cor. 1 al Teor. 23 sappiamo che ogni  $u \in W^{k,p}$  è approssimabile in  $W^{k,p}$  con una successione  $\{u_\varepsilon\}$  di funzioni  $C^\infty$ . Se poi la  $u$  ha supporto compatto, anche le  $u_\varepsilon$  hanno supporto compatto in quanto convoluzioni fra funzioni a supporto compatto. Resta solo da verificare che ogni  $u \in W^{k,p}$  è approssimabile con una successione  $\{u_j\} \subset W^{k,p}$  di funzioni a supporto compatto. A questo scopo basta costruire una successione di *funzioni cut-off*  $\{\psi_j(x)\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  tali che

- $\psi_j(x) \equiv 1$  per  $|x| \leq j$
- $\psi_j(x) \equiv 0$  per  $|x| \geq j+1$
- $|\partial^\alpha \psi_j(x)| \leq C(\alpha), \quad \forall \alpha,$

dove le  $C(\alpha)$  sono costanti indipendenti da  $j$ , e quindi prendere  $u_j(x) = u(x) \psi_j(x)$ .

La costruzione delle  $\psi_j(x)$  è facile: scegliendo funzioni di tipo radiale possiamo ridurci al caso unidimensionale e in questo caso, usando le funzioni del tipo  $\exp[-1/(x-c)^2]$ , per ogni intervallo  $[a, b]$  è possibile raccordare in modo  $C^\infty$  la funzione che vale 0 su  $]-\infty, a]$  con quella che vale 1 su  $[b, +\infty[$ .  $\square$

**Corollario.** [integrazione per parti] Per ogni funzione  $w \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$  ed ogni  $j = 1, \dots, n$ , risulta

$$\int \partial_j w(x) dx = 0. \quad (10.12)$$

Di conseguenza, per ogni  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ , o anche per ogni  $u \in W^{1,\infty}, v \in W^{1,1}$ , vale l'identità

$$\int u \partial_j v dx = - \int v \partial_j u dx. \quad (10.13)$$

**Dim.** Se  $w \in C_0^1$ , la (10.12) è un'immediata conseguenza della formula di Gauss-Green. Nel caso generale prendiamo una successione  $\{w_\varepsilon\}$  convergente verso  $w$  in  $W^{1,1}$ , cosicchè le derivate  $\{\partial_j w_\varepsilon\}$  convergono verso  $\partial_j w$  in  $L^1$ : dato che

$$\int \partial_j w_\varepsilon dx = 0, \quad \forall \varepsilon,$$

passando al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , otteniamo la (10.12). Quanto alla (10.13) si noti che (anche nel senso delle derivate deboli) si ha  $\partial_j(uv) = u \partial_j v + v \partial_j u$ , dunque  $w \equiv uv \in W^{1,1}$ .  $\square$

Se ci si pone su un dominio  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ , il Teorema 24 può cadere in difetto. Per ogni intero  $k \geq 1$ , si definisce allora il seguente sottospazio di  $H^k(\Omega)$ :

$$H_0^k(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^k} \equiv \left\{ u \in H^k(\Omega) : \exists \{\varphi_j\} \subset \mathcal{D}(\Omega) \text{ tale che } \{\varphi_j\} \rightarrow u \text{ in } H^k(\Omega) \right\}.$$

Il Teorema 24 afferma che  $H_0^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^n)$ . Notiamo che  $H_0^k(\Omega)$  è un sottospazio chiuso di  $H^k(\Omega)$  e quindi è uno spazio di Hilbert (con lo stesso prodotto scalare di  $H^k(\Omega)$ ). Notiamo anche che la formula d'integrazione per parti (10.13) è valida per ogni  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ .

Nel caso  $n = 1$  è facile verificare che, se  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , una funzione  $\varphi(x)$  appartiene allo spazio  $H_0^1(a, b)$  se e solo se è continua sull'intervallo chiuso  $[a, b]$  e nulla agli estremi.

In modo analogo, per ogni intero  $k \geq 1$  ed ogni  $p < \infty$ , si definiscono gli spazi  $W_0^{k,p}(\Omega)$ .

# Capitolo 11

## Distribuzioni

### 11.1 Duale di uno spazio di Banach

Se  $X$  uno spazio normato sul corpo complesso  $\mathbb{C}$ , le funzioni lineari  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  sono chiamate *funzionali lineari*, o anche *forme lineari*, su  $X$ . Per ogni funzionale lineare  $f$  ed ogni vettore  $x \in X$ , si usa scrivere

$$\langle f, x \rangle = f(x).$$

I funzionali lineari e continui su  $X$  formano uno spazio vettoriale che viene indicato con  $X'$ : lo spazio *duale* di  $X$ . Un funzionale lineare  $f$  è continuo se e solo se esiste una costante  $C \geq 0$  per cui

$$|\langle f, x \rangle| \leq C \|x\| \quad \forall x \in X,$$

e la miglior costante  $C$  è detta la *norma* di  $f$ ; in altri termini si definisce

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Con tale norma  $X'$  è a sua volta uno spazio normato completo sul corpo  $\mathbb{C}$ , come si verifica facilmente, dunque è uno spazio di Banach.

Se  $X$  è uno spazio di Banach sul *corpo reale*,  $X'$  è lo spazio di Banach (su  $\mathbb{R}$ ) formato dai funzionali lineari e continui  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se  $H$  è uno spazio di Hilbert reale, il teorema di Riesz afferma che  $H'$  può essere identificato con  $H$ :  $H' \simeq H$ ; precisamente, se ad ogni  $x \in H$  associamo il funzionale lineare

$$f_x : y \mapsto (y, x)_H,$$

l'applicazione  $\rho : x \mapsto f_x$  è un'isometria lineare bigettiva da  $H$  su  $H'$ . Se  $H$  è uno spazio di Hilbert complesso,  $\rho$  è una bigezione *anti-lineare*, cioè è additiva e verifica  $\rho(\lambda x) = \bar{\lambda} \rho(x)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Esempio 6.** Per ogni ins. misurabile  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , si ha:

$$\begin{aligned} \text{se } 1 \leq p < \infty, \quad \text{si ha} \quad (L^p(S))' &\simeq L^q(S) \quad \text{dove } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\ \text{se } p = \infty, \quad \text{si ha} \quad L^1(S) &\subsetneq (L^\infty(S))', \end{aligned}$$

cioè il duale di  $L^p$  è isometrico a  $L^q$  mentre il duale di  $L^1$  è isometrico a un sottospazio proprio di  $(L^\infty)'$ .

Precisamente, grazie alla dis. di Hölder

$$\left| \int_S \varphi \psi dx \right| \leq \|\varphi\|_{L^p} \|\psi\|_{L^q}, \quad (11.1)$$

per ogni  $f \in L^q$ , con  $1 \leq q \leq \infty$ , possiamo definire il funzionale lineare e continuo

$$\tau_f : L^p(S) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dove} \quad \langle \tau_f, u \rangle = \int_S f u dx,$$

e di conseguenza resta definito l'operatore lineare

$$\tau : L^q \rightarrow (L^p)', \quad \text{dove} \quad \tau : f \mapsto \tau_f.$$

Sempre dalla (11.1) segue che  $\tau$  è un operatore continuo, infatti

$$\|\tau_f\| \equiv \sup \left\{ |\langle \tau_f, u \rangle| : \|u\|_{L^p(S)} \leq 1 \right\} \leq \|f\|_{L^q(S)}.$$

E' abbastanza facile verificare che  $\tau$  è iniettivo, anzi è un'isometria nel senso che  $\|\tau_f\| = \|f\|_{L^q}$ . Infine si può dimostrare (ma non è semplice) che nel caso  $p < \infty$ , e quindi  $q > 1$ , l'operatore  $\tau$  è surgettivo.  $\square$

Sia  $X$  un arbitrario spazio di Banach. Dato che anche  $X'$  è uno spazio di Banach, possiamo definire il biduale  $X'' = (X')'$ . L'applicazione di *valutazione*<sup>1</sup>  $\delta : X \rightarrow X''$  è definita ponendo

$$\delta : x_0 \mapsto \delta_{x_0}, \quad \text{dove} \quad \delta_{x_0}(f) = \langle f, x_0 \rangle \quad \forall f \in X'.$$

Essa è chiaramente iniettiva, anzi grazie al Teor. di Hahn-Banach (vedi sotto) verifica

$$\|\delta_x\|_{X''} = \|x\|_X.$$

In generale però  $\delta$  non è surgettiva. Quando ciò accade, si può fare l'identificazione isometrica  $X'' \simeq X$ , e lo spazio  $X$  si dice *riflessivo*. Gli spazi  $L^p$  con  $1 < p < \infty$  sono riflessivi, mentre  $L^1$  ed  $L^\infty$  non lo sono.

Il risultato centrale della teoria della dualità è il

**Teorema 25. (Hahn-Banach)** *Sia  $X$  uno spazio normato reale,  $M \subset X$  un sottospazio lineare. Allora ogni funzionale lineare e continuo  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  può estendersi ad un funzionale lineare e continuo  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ , con norma  $\|F\|_{X'} = \|f\|_{M'}$ .*

**Dim.** La dimostrazione, per la quale rinviamo a K. Yosida *Functional Analysis*, Springer 1969, si basa sul Lemma di Zorn, e quindi sul Postulato di Zermelo (Assioma della scelta).  $\square$

**Corollario 1.** *Per ogni  $x_0 \in X$ , si può trovare un funzionale  $f_0 \in X'$  tale che*

$$\|f_0\|_{X'} = \|x_0\|_X, \quad \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|_X^2.$$

*In particolare, se  $X \neq \{0\}$ , il duale  $X'$  non può mai ridursi allo spazio nullo.*

**Corollario 2.** *Per ogni sottospazio chiuso  $M \subset X$ , esiste un funzionale lineare e continuo  $f_0 \neq 0$  che si annulla su ogni vettore di  $M$ .*

**Corollario 3.** *Un sottospazio  $M \subset X$  è denso in  $X$  se e solo se l'unico funzionale  $f \in X'$  che si annulla su  $M$  è il funzionale nullo.*

---

<sup>1</sup> che è una sorta di Delta di Dirac

## 11.2 Definizioni

Lo spazio delle distribuzioni su un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  fu introdotto negli anni '50 da Laurent Schwartz come duale dello spazio  $\mathcal{D}(\Omega)$  delle funzioni  $C^\infty$  a supporto compatto in  $\Omega$ . Per maggior generalità ci porremo nel caso complesso, in cui le funzioni test sono a valori in  $\mathbb{C}$ .

Il punto di partenza della teoria delle distribuzioni è l'osservazione che, ad ogni  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  possiamo associare il funzionale lineare  $\tau_f : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  così definito:

$$\langle \tau_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (11.2)$$

Oltre che lineare, il funzionale  $\tau = \tau_f$  è (sequenzialmente) *continuo* su  $\mathcal{D}(\Omega)$  nel senso che

$$\{\varphi_k\} \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \tau, \varphi_k \rangle = \langle \tau, \varphi \rangle, \quad (11.3)$$

dove la convergenza in  $\mathcal{D}(\Omega)$  è così definita:

**Definizione 16. [convergenza in  $\mathcal{D}$ ]** Data una success.  $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  si dice che  $\{\varphi_k\} \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$  se

- i) esiste un compatto  $K \subset \Omega$  per cui  $\text{supp}(\varphi_k) \subseteq K, \forall k$ ,
- ii)  $\{\partial^\alpha \varphi_k(x)\} \rightarrow \partial^\alpha \varphi(x)$  uniformemente su  $\Omega, \forall \alpha$ .

**Definizione 17. [distribuzioni]** Si chiama *distribuzione* su  $\Omega$  ogni applicazione lineare  $\tau : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  che sia continua nel senso di (11.3)

In particolare il funzionale lineare  $\tau_f$  definito dalla (11.2) è una distribuzione. Inoltre l'operatore lineare  $f \mapsto \tau_f$  è iniettivo per il Teor. di Riemann-Lebesgue, e quindi possiamo identificare lo spazio  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  ad un sottospazio dello spazio delle distribuzioni:

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Osservazione 22. [spazi localmente convessi]** Uno *spazio vettoriale topologico* (s.v.t.) è uno spazio vettoriale sul corpo  $\mathbb{C}$  su cui è assegnata una *topologia* per la quale risultano continue le seguenti applicazioni a valori in  $X$ , la prima definita sullo spazio  $X \times X$  e la seconda su  $\mathbb{C} \times X$ ,

$$(x, y) \mapsto x + y, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x.$$

Il *duale* (topologico) di  $X$ , indicato con  $X'$ , è lo spazio vettoriale dei funzionali lineari e continui su  $X$ .

Gli s.v.t. formano una classe molto ampia. Nella teoria delle equazioni alle derivate parziali possiamo limitarci a considerare una classe particolare di s.v.t., gli spazi *localmente convessi* (l.c.), cioè gli s.v.t.  $X$  la cui topologia deriva da una famiglia  $\{p_\alpha\}$  di seminorme<sup>2</sup>. Ciò significa che, per ogni *successione generalizzata*<sup>3</sup>  $\{x_i\} \subset X$ , risulta:

$$\{x_i\} \xrightarrow{X} x \iff \lim_i p_\alpha(x_i - x) = 0 \quad \text{per ogni seminorma } p_\alpha.$$

Nella categoria degli spazi l.c. è possibile, usando le seminorme, definire la nozione di succ. generalizzata di Cauchy (per ogni seminorma:  $p_\alpha(x_i - x_j) \leq \varepsilon$  per  $i, j \geq k(\varepsilon)$ ) e quindi quella di spazio l.c. completo (ogni succ. generalizzata di Cauchy ha un limite in  $X$ ).

<sup>2</sup> Una seminorma su uno spazio vettoriale  $X$  è una funzione  $p : X \rightarrow [0, +\infty[$  che ha tutte le proprietà di una norma tranne eventualmente quella di annullarsi solo sul vettore nullo.

<sup>3</sup> Una successione generalizzata in  $X$  è un'applicazione  $\xi : I \rightarrow X$ , dove l'insieme degli indici non è necessariamente  $\mathbb{N}$  (come nel caso delle successioni usuali), ma è un arbitrario *insieme filtrante*, cioè è un ins. parzialmente ordinato e *diretto* nel senso che per ogni  $i, j \in I$  esiste  $k \in I$  tale che  $i, j \leq k$ . Si scrive usualmente  $\xi(i) = x_i$ . Se  $\{a_i\}$  è una succ. generalizzata di numeri reali, dire  $\lim a_i = a$  significa che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $k \in I$  per cui  $|a_i - a| \leq \varepsilon$  per ogni  $i \geq k$ .

La classe degli spazi l.c. completi include ovviamente gli spazi di Banach. Un'importante classe intermedia è quella gli *spazi di Fréchet*, cioè quegli spazi l.c. completi che hanno una famiglia *numerabile*  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di seminorme. Si verifica facilmente che ogni spazio di Fréchet è *metrizzabile*, nel senso che la sua topologia è indotta da una metrica, ad esempio dalla seguente:

$$\text{dist}(x, y) \equiv |x - y| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}.$$

**Osservazione 23.** Tornando alle distribuzioni, occorre dire che è possibile dotare lo spazio vettoriale  $\mathcal{D}(\Omega)$  di una famiglia non numerabile di seminorme (di non semplice descrizione) che lo rende uno spazio l.c. completo, in cui le successioni convergenti a zero sono tutte e sole quelle che tendono a zero secondo la Def. 16. Tale spazio non è uno spazio di Fréchet, ma gode tuttavia di questa proprietà: i funzionali lineari sequenzialmente continui su  $\mathcal{D}(\Omega)$ , cioè le distribuzioni, sono anche continui in senso topologico.

Dunque per definire il duale di  $\mathcal{D}(\Omega)$  possiamo limitarci a considerare le successioni usuali senza scomodare quelle generalizzate, e lo spazio delle distribuzioni sopra definite (Def. 17) coincide effettivamente con il duale dello spazio l.c.  $\mathcal{D}(\Omega)$ , ed è quindi indicato con  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Peraltro esistono delle funzioni (necessariamente non lineari)  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$  che sono *sequenzialmente continue* su  $\mathcal{D}(\Omega)$  ma non continue in senso topologico.

**Definizione 18. [derivate di una distribuzione]** Per ogni distribuzione  $\tau \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , i funzionali

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_j} : \varphi \mapsto -\langle \tau, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle, \quad j = 1, \dots, n,$$

sono lineari e continui sullo spazio  $\mathcal{D}(\Omega)$  e quindi definiscono a loro volta delle distribuzioni. La differenza con le derivate deboli degli spazi di Sobolev è che ora non si pretende che le derivate siano delle funzioni, cioè appartengano ad  $L^1_{\text{loc}}$ . Di conseguenza che le derivate distribuzionali esistono sempre.

Più in generale, per ogni  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , possiamo definire la derivata  $\partial^\alpha \tau \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , ponendo

$$\langle \partial^\alpha \tau, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \tau, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Definizione 19. [moltiplicazione con una funzione]** In generale non si possono moltiplicare due distribuzioni fra loro, ad esempio non esiste il quadrato della Delta di Dirac, tuttavia ogni  $\tau \in \mathcal{D}'(\Omega)$  può essere moltiplicata per un'arbitraria funzione test  $\psi(x)$ , ponendo

$$\langle \psi \tau, \varphi \rangle = \langle \tau, \psi \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Esercizio:** Per la Delta di Dirac in una variabile, risulta:

$$x \delta = 0, \quad x \delta' = -\delta, \quad x^2 \delta' = 0.$$

**Definizione 20. (supporto)** Se  $\tau \in \mathcal{D}'$  si dice che  $\tau \equiv 0$  su qualche sottoinsieme aperto  $\omega \subset \Omega$  quando

$$\langle \tau, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega) \subset \mathcal{D}(\Omega)$$

Usando una *partizione dell'unità* si vede che, se  $\omega = \cup \omega_j$  e  $\tau \equiv 0$  su ognuno degli  $\omega_j$ , allora  $\tau \equiv 0$  su  $\omega$ . Il *supporto* di  $\tau$  è il più piccolo sottoinsieme chiuso di  $\Omega$  sul cui complementare  $\tau$  si annulla. In altre parole, il complementare del supporto è il massimo aperto su cui  $\tau \equiv 0$ . Il supporto di  $\tau$  è vuoto se e solo se  $\tau \equiv 0$  su  $\Omega$ , mentre coincide con tutto  $\Omega$  se e solo se  $\tau$  non si annulla in alcun aperto  $\omega \subset \Omega$ .

## Esempi.

- Una funzione  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  ha supporto  $S$ , con  $S$  insieme chiuso in  $\Omega$ , se  $f \equiv 0$  q.o. su  $\Omega \setminus S$ , e inoltre per ogni  $x \in S$  non esiste alcun intorno di  $x$  sul quale  $f \equiv 0$  q.o.
- La funzione  $f(x) = x$  ha per supporto l'intero asse reale  $\mathbb{R}$ .
- La delta di Dirac  $\delta_{x_0}$  ha per supporto il punto  $\{x_0\}$ , e così pure tutte le sua derivate  $\partial^\alpha \delta_{x_0}$ .

**Definizione 21.** [restrizione] Per ogni  $\tau \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , la *restrizione* di  $\tau$  ad un aperto  $\omega \subset \Omega$  è la distribuzione  $\tau|_\omega \in \mathcal{D}'(\omega)$  definita da:

$$\langle \tau|_\omega, \varphi \rangle = \langle \tau, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega) \subset \mathcal{D}(\Omega).$$

## 11.3 Esempi di distribuzioni

1. *Distribuzioni di tipo funzione*: sono le distribuzioni  $\tau_f$  con  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  (vedi la 11.2)
2. *Delta di Dirac nel punto*  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ :  $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$
3. *Derivate della Delta di Dirac*:  $\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0)$
4. *Valor principale di  $1/x$* : è la distribuzione su  $\mathbb{R}$  definita da

$$\langle \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx. \quad (11.4)$$

Dimostriamo che il limite nella (11.4) esiste. Per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}$  vi è una e una sola funzione  $\tilde{\varphi} \in C^\infty$  per cui

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \tilde{\varphi}(x),$$

quindi, fissando  $R$  così grande da avere  $\text{supp}(\varphi) \subset [-R, R]$ , troviamo (essendo  $1/x$  una funzione dispari):

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \tilde{\varphi}(x) dx = \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \tilde{\varphi}(x) dx,$$

e quindi, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\langle \mathcal{P}(1/x), \varphi \rangle = \int_{-R}^R \tilde{\varphi}(x) dx.$$

Per asserire che quest'ultima formula definisce una distribuzione, basta notare che, se  $\{\varphi_k\} \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}$ , allora  $\text{supp}(\tilde{\varphi}_k) \subseteq [R, R]$  per qualche  $R > 0$ , e  $\{\tilde{\varphi}_k\} \rightarrow 0$  in  $L^1(-R, R)$ .

Si verifica che  $\mathcal{P}(1/x)$  non è una *distribuzione di ordine zero*, cioè non è una funzione  $L^1_{\text{loc}}$  né una *misura* (come la Delta di Dirac) bensì è una *distribuzione del primo ordine*, come la derivata della Delta (vedi il paragrafo successivo). Si ha poi:

$$x \cdot \mathcal{P}(1/x) = 1, \quad \mathcal{P}(1/x) = (\log|x|)',$$

infatti

$$\begin{aligned} \langle x \mathcal{P}(1/x), \varphi \rangle &= \langle \mathcal{P}(1/x), x \varphi(x) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x \varphi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle, \\ \int_{\mathbb{R}} \log|x| \varphi'(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \log|x| \varphi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \log \varepsilon [\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] - \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = - \langle \mathcal{P}(1/x), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

## 11.4 Spazi normali di distribuzioni

Un'applicazione lineare iniettiva e continua  $j: V \rightarrow X$  fra spazi vettoriali topologici è detta *immersione*:

$$V \xhookrightarrow{j} X.$$

Notiamo che  $V$  può essere visto come un sottospazio lineare di  $X$ , ma è dotato di una sua topologia che è (in generale) più forte di quella ereditata da  $X$ . Per dualità, ponendo

$$\langle j'f, v \rangle = \langle f, jv \rangle, \quad f \in X', \quad v \in V,$$

possiamo definire un'applicazione lineare (e continua)

$$j' : X' \longrightarrow V'.$$

Un caso tipico è quando  $V \simeq j(V)$  è *denso* in  $X$ . In tal caso l'applicazione  $j'$  risulta a sua volta iniettiva: infatti, da  $j'f = 0$ , cioè  $\langle j'f, v \rangle = 0$  per ogni  $v \in V$ , segue che  $\langle f, jv \rangle = 0$ ; ma allora, per la densità dei vettori  $j(V)$  in  $X$ , possiamo concludere che  $f = 0$ . In questo caso abbiamo dunque le due immersioni:

$$V \hookrightarrow X, \quad X' \hookrightarrow V'.$$

Da notare che lo spazio  $X' \simeq j'(X')$  è formato da quei funzionali lineari su  $V$  che sono continui non solo rispetto alla topologia di  $V$  ma anche rispetto alla (più debole) topologia di  $X$ .

Se  $X$  è uno spazio di Hilbert, ricordando il teorema di rappresentazione di Riesz troviamo

$$V \hookrightarrow X \simeq X' \hookrightarrow V'.$$

Nel caso che  $V$  sia uno spazio di Banach riflessivo, si parla di *terna hilbertiana*.

Per ottenere degli spazi di distribuzioni, basta partire da uno spazio lineare topologico  $X$  nel quale  $\mathcal{D}(\Omega)$  si immerga con continuità e densità, cosicché il suo duale  $X'$  possa essere visto come un sottospazio di  $\mathcal{D}'(\Omega)$ :

$$X' \simeq \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Omega) : \langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow 0 \quad \forall \{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega) \text{ t.c. } \{\varphi_k\} \xrightarrow{X} 0 \right\}$$

Il caso più semplice è il seguente <sup>4</sup>.

$$\mathcal{D}(\Omega) \xhookrightarrow{\text{denso}} X \hookrightarrow L^2(\Omega) \xleftrightarrow{\text{Riesz}} L^2(\Omega) \hookrightarrow X' \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

dove, per avere una rappresentazione di  $X'$  come sottospazio di  $\mathcal{D}'$ , utilizziamo  $L^2$  come *spazio perno*.

### Esempi.

1.  $X = \mathcal{S}$  (spazio di Schwartz)

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq C_{\alpha\beta} < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \right\}$$

In particolare, prendendo  $\beta = 0$ , vediamo che ogni  $\varphi \in \mathcal{S}$  verifica

$$|\varphi(x)| \leq \frac{C_N}{(1 + |x|)^N} \quad \forall N. \tag{11.5}$$

Le  $\varphi(x)$  che verificano la (11.5) sono dette *funzioni a decrescenza rapida* (all'infinito), dunque  $\mathcal{S}$  è l'insieme delle funzioni  $\mathcal{C}^\infty$  che sono a decrescenza rapida insieme alle loro derivate di qualunque ordine. Si tratta di uno spazio l.c. con la famiglia (numerabile) di seminorme:

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,$$

<sup>4</sup> comunque l'immersione di  $X$  in  $L^2$  non è richiesta.

e quindi con la convergenza :

$$\{\varphi_k\} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} p_{\alpha, \beta}(\varphi_k) = 0 \quad \forall \alpha, \beta. \quad (11.6)$$

Si può facilmente verificare che  $\mathcal{S}$  è uno spazio l.c. completo, dunque è uno spazio di Fréchet.

Un altro fatto non difficile da verificare è che  $\mathcal{D}$  è denso in  $\mathcal{S}$ . Si ha dunque lo schema:

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'.$$

Il duale dello spazio di Schwartz, cioè lo spazio

$$\mathcal{S}' = \left\{ f \in \mathcal{D}' : \langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow 0 \quad \forall \{\varphi_k\} \subset \mathcal{D} \text{ t.c. } \{\varphi_k\} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \right\},$$

è detto spazio delle *distribuzioni temperate*. Una distribuzione di tipo funzione,  $f \in L^1_{\text{loc}}$ , per appartenere ad  $\mathcal{S}'$  deve potersi applicare a tutte le funzioni a decrescenza rapida, di conseguenza deve avere una *crescita al più polinomiale* all'infinito, cioè deve verificare

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^N, \quad \text{per qualche } N.$$

In particolare, la funzione esponenziale  $e^x$  non può appartenere ad  $\mathcal{S}'$ .

Si può dimostrare che una distribuzione sta in  $\mathcal{S}'$  se e solo se è la somma di un certo numero di derivate (distribuzionali) di funzioni  $L^1_{\text{loc}}$  a crescita polinomiale.

## 2. $X = \mathcal{E}$ (funzioni $C^\infty$ )

Anche questo è uno spazio di Fréchet, con la famiglia (numerabile) di seminorme

$$p_{K, \alpha}(\varphi) = \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)} \quad (11.7)$$

al variare di  $K$  fra i sottinsiemi compatti di  $\mathbb{R}^n$  e di  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . Dunque una successione  $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{E}$  converge a zero se  $\{\varphi_k\}$  e tutte le sue derivate  $\partial^\alpha \{\varphi_k\}$  tendono a zero uniformemente su ogni compatto.

Si verifica facilmente che  $\mathcal{D}$  (e quindi anche  $\mathcal{S}$ ) è denso in  $\mathcal{E}$ . Quindi si arriva allo schema:

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'.$$

Poiché le funzioni di  $\mathcal{E}$  sono libere di crescere in modo arbitrariamente grande all'infinito, in  $\mathcal{E}'$  possono trovarsi solo distribuzioni a supporto compatto, cioè:

$$\mathcal{E}' = \left\{ \tau \in \mathcal{D}' : \tau \text{ ha supporto compatto in } \mathbb{R}^n \right\}.$$

In modo analogo, per ogni aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , possiamo definire lo spazio  $\mathcal{E}(\Omega)$  e il suo duale  $\mathcal{E}'(\Omega)$ .

## 3. $X = \mathcal{D}_m(\Omega)$ .

$\mathcal{D}_m(\Omega)$  è lo spazio di Fréchet delle funzioni di classe  $C^m$  con le seminorme (11.7) limitatamente ai multi-indici  $\alpha$  con  $|\alpha| \leq m$ . Il duale di tale spazio  $\mathcal{D}'_m(\Omega)$  è lo spazio delle distribuzioni di ordine  $m$ . Dunque una distribuzione  $\tau$  su  $\Omega$  ha ordine  $m$  se  $\langle \tau, \varphi_k \rangle \rightarrow 0$  per ogni successione  $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ , con  $\text{supp}(\varphi_k) \subseteq K$  per qualche  $K \subset\subset \Omega$ , che converga a zero con tutte le derivate di ordine  $\leq m$ .

## 4. $X = H^k_0(\Omega)$ .

Ricordiamo che  $H^k_0(\Omega)$  è la chiusura di  $\mathcal{D}(\Omega)$  in  $H^k(\Omega)$ , dunque  $\mathcal{D}(\Omega)$  è denso in  $H^k_0(\Omega)$ . Dato che  $H^k_0(\Omega)$  è uno spazio di Banach (con la stessa norma di  $H^k(\Omega)$ ), il suo duale  $H^k_0(\Omega)'$ , che viene indicato con  $H^{-k}(\Omega)$ , ammette la seguente rappresentazione in  $\mathcal{D}'(\Omega)$ :

$$H^{-k}(\Omega) = \left\{ \tau \in \mathcal{D}'(\Omega) : |\langle \tau, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{H^k}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right\}.$$

Dunque si hanno le inclusioni:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^k(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-k}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Ricordiamo (Teor. 24) che su tutto  $\mathbb{R}^n$  ogni  $u \in H^k$  è approssimabile con delle  $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}$ , cioè

$$H_0^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^n).$$

Ci possiamo chiedere se la Delta di Dirac appartenga ad  $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ . Per  $n = 1$  la risposta è sì, infatti

$$|\langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{H^1}.$$

Del resto, essendo  $H^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$ , è chiaro che possiamo applicare la  $\delta$  a tutte le funzioni di  $H^1$ .

Per  $n \geq 2$ ,  $H^1(\mathbb{R}^n)$  non è incluso in  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ , quindi  $\delta \notin H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ .

## 11.5 Lo spazio $H^{-1}(\Omega)$

Per descrivere lo spazio  $H^{-1}(\Omega) \equiv (H_0^1(\Omega))' \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ , ricorriamo ad un utile risultato di Analisi Funzionale:

**Teorema 26. [Lax-Milgram]** *Sia  $V$  uno spazio di Banach riflessivo, cioè uno spazio per cui  $(V')' \simeq V$ , e sia  $A : V \rightarrow V'$  un operatore lineare, continuo e coercivo nel senso che*

$$\langle Av, v \rangle \geq \lambda_0 \|v\|_V^2 \quad \text{per qualche } \lambda_0 > 0.$$

Allora  $A$  è iniettivo e surgettivo.

**Dim.** Scriveremo qui per brevità

$$\|v\| = \|v\|_V, \quad \|f\|_* = \|f\|_{V'} \equiv \sup_{\|v\|=1} |\langle f, v \rangle|.$$

La tesi del Teorema viene raggiunta in tre passi:

i)  $A$  è iniettivo. Dalla coercività si ricava che  $\lambda_0 \|v\|^2 \leq \langle Av, v \rangle \leq \|Av\|_* \|v\|$  e quindi

$$\|Av\|_* \geq \lambda_0 \|v\|. \quad (11.8)$$

ma allora, se  $v \in V$  è tale che  $Av = 0$ , si ha  $0 = \langle Av, v \rangle \geq \lambda_0 \|v\|^2$  e quindi  $v = 0$ .

ii)  $A$  ha immagine densa in  $V'$ . Dal Corollario 3 del Teor. 25 (Hahn-Banach) applicato allo spazio  $V'$  ed al sottospazio  $M = A(V) \subset V'$ , sappiamo che  $M$  è denso in  $V'$  se il solo funzionale su  $V'$  che si annulla su  $M$ , è quello nullo. Nel nostro caso  $(V')' \simeq V$ , quindi  $A(V)$  è denso in  $V'$  se, per ogni  $v_0 \in V$ ,

$$\langle Aw, v_0 \rangle = 0 \quad \forall w \in V \implies v_0 = 0.$$

Ora, scegliendo  $w = v_0$ , troviamo  $\langle Av_0, v_0 \rangle = 0$  e quindi, per l'ipotesi di coercività,  $v_0 = 0$ .

iii)  $A$  ha immagine chiusa in  $V'$ . Se  $\{Av_j\} \subseteq A(V)$  è una successione convergente verso qualche  $f \in V'$ , si ha  $\|Av_i - Av_j\|_* \rightarrow 0$  per  $i, j \rightarrow \infty$ , e quindi, in virtù della (11.8), anche  $\|v_i - v_j\| \rightarrow 0$ , cioè  $\{v_j\}$  è una successione di Cauchy in  $V$ . Ma allora tale successione è convergente verso qualche  $v \in V$  e, per la continuità di  $A$ , se ne deduce che  $\{Av_j\} \rightarrow Av$  in  $V'$ , cosicchè  $f = Av$ .  $\square$

**Osservazione 24.** Un caso particolare è quello in cui, oltre alla coercività,  $A$  verifica la proprietà di *auto-aggiunzione*, cioè

$$\langle Av, w \rangle = \langle Aw, v \rangle.$$

Tale proprietà non è necessaria per provare che  $A$  è surgettivo, ma diventa importante se si vuole studiare l'equazione  $Au = f$  col *metodo variazionale*

**Osservazione 25.** Una situazione tipica si ha quando vi è un'immersione continua  $\mathcal{I} : V \hookrightarrow V'$  (come nel caso delle terne hilbertiane  $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ ). In tal caso, se indeboliamo l'ipotesi di coercività dell'operatore  $A$  supponendo solo che  $\langle Av, v \rangle \geq 0$ , possiamo concludere che  $\lambda\mathcal{I} + A$  è un isomorfismo per ogni  $\lambda > 0$ .

Grazie al Teor. di Lax-Milgram siamo in grado di caratterizzare le distribuzioni appartenenti ad  $H^{-1}(\Omega)$ :

**Teorema 27.** [caratterizzazione di  $H^{-1}$ ] Per ogni distribuzione  $\tau \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , si ha:

$$\tau \in H^{-1}(\Omega) \iff \exists f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega) : \tau = f_0 + \partial_1 f_1 + \dots + \partial_n f_n \quad (11.9)$$

dove  $\partial_j f_j$  sono le derivate distribuzionali di  $f_j$ .

**Dim.** L'implicazione  $\Leftarrow$  è facile, infatti per ogni  $f \in L^2(\Omega)$  risulta che  $\partial_j f \in H^{-1}(\Omega)$ , dal momento che

$$|\langle \partial_j f, \varphi \rangle| = |-\langle f, \partial_j \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} f \partial_j \varphi \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Per provare l'implicazione inversa, ricordiamo anzitutto che la norma di una  $f \in H^{-1}$  è data da:

$$\|f\|_{H^{-1}} = \sup \left\{ \langle f, \varphi \rangle : \varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|_{H^1} \leq 1 \right\} \equiv \sup \left\{ \langle f, \varphi \rangle : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \|\varphi\|_{H^1} \leq 1 \right\}.$$

Osserviamo ora che le applicazioni

$$H_0^1(\Omega) \xrightarrow{\partial_i} L^2(\Omega) \xrightarrow{\partial_j} H^{-1}(\Omega)$$

sono continue, e quindi risulta continuo anche il Laplaciano

$$\Delta \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_n^2 : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega).$$

Si ha poi

$$-\langle \Delta u, u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (11.10)$$

e quindi l'operatore  $A = \mathcal{I} - \Delta : u \rightarrow u - \Delta u$  verifica l'ipotesi del Teor. di Lax-Milgram. Possiamo dunque concludere che  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  è surgettivo, i.e. per ogni  $f \in H^{-1}(\Omega)$  esiste  $u \in H_0^1(\Omega)$  per cui

$$f = u - \sum_{j=1}^n \partial_j(\partial_j u).$$

Ma allora, dato che le funzioni  $f_0 \equiv u$ ,  $f_j \equiv \partial_j u$  stanno in  $L^2$ , otteniamo la (11.9).  $\square$

**Osservazione 26.** Nel caso in cui  $\Omega$  è un aperto *limitato* di  $\mathbb{R}^n$  con frontiera regolare, non è necessario aggiungere al laplaciano l'operatore  $-\mathcal{I}$  per ottenere un isomorfismo: in questo caso lo stesso laplaciano  $\Delta$  è già un isomorfismo fra  $H_0^1(\Omega)$  e  $H^{-1}(\Omega)$ . Vale infatti la *diseguaglianza di Poincaré*<sup>5</sup>

$$\int_{\Omega} |u|^2 \, dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

dalla quale, tenendo conto della (11.10), segue immediatamente la coercività di  $-\Delta$ .

<sup>5</sup> Per provare la dis. di Poincaré si può usare il Teor. di Rellich che afferma (nelle nostre ipotesi su  $\Omega$ ) che l'immersione  $H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  è *compatta*, cioè da ogni succ. limitata in  $H_0^1(\Omega)$  si può estrarre una sottosucc. convergente in  $L^2(\Omega)$ .

Nel caso invece in cui  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , l'operatore  $\Delta : H^1 \rightarrow H^{-1}$  è iniettivo con immagine densa ma non è surgettivo. Infatti, fissata una  $\varphi \in \mathcal{D}$ , la successione  $\{u_k\} \subset H_0^1$  definita da

$$u_k(x) = k^{-\alpha} \varphi(x/k)$$

verifica

$$\|u_k\|_{L^2} = k^{n-\alpha} \|\varphi\|_{L^2}, \quad \|\nabla u_k\|_{L^2} = k^{n-\alpha-1} \|\nabla \varphi\|_{L^2},$$

e quindi, se scegliamo  $n/2 - 1 < \alpha < n/2$ , vediamo che  $\|u_k\|_{L^2} \rightarrow \infty$ ,  $\|\nabla u_k\|_{L^2} \rightarrow 0$ . Ma allora

$$\{\Delta u_k\} = \{\operatorname{div} \nabla u_k\} \rightarrow 0 \text{ in } H^{-1} \quad \text{mentre} \quad \{u_k\} \not\rightarrow 0 \text{ in } H_0^1.$$

Ciò esclude che  $\Delta$  possa essere surgettivo, in tal caso infatti esso avrebbe un inverso continuo da  $H^{-1}$  in  $H_0^1$ , in virtù del seguente classico risultato (cf. K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer 1969):

**Teorema 28. [grafico chiuso].** *Un operatore lineare e continuo  $A : X \rightarrow Y$  fra due spazi di Banach che sia iniettivo e surgettivo ha inverso continuo. Lo stesso risultato vale se  $X, Y$  sono due spazi di Fréchet.*

# Capitolo 12

## Trasformata di Fourier

### 12.1 Richiami sulle Serie di Fourier

La trasformata di Fourier è una generalizzazione della serie di Fourier. La serie di Fourier permette di scrivere qualunque funzione  $f(x)$ , periodica di periodo  $2\pi$ , nella forma:

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h e^{ihx}$$

dove i coefficienti  $c_h$  dello sviluppo sono:

$$c_h \equiv \widehat{f}(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ihx} dx, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Questo integrale può essere interpretato come il prodotto scalare nello spazio di Hilbert complesso  $L^2(0, 2\pi)$  tra il vettore  $f(x)$  ed un elemento della base hilbertiana  $\{e^{ihx}\}$ . In pratica stiamo esprimendo la funzione  $f$  come limite di polinomi trigonometrici.

**Definizione 22. [polinomi trigonometrici]** Un *polinomio trigonometrico* è la composizione di un polinomio con la funzione  $e^{ix}$ , cioè una funzione del tipo

$$P_N(x) = \sum_{h=-N}^N c_h e^{ihx}.$$

Si dimostra che, per ogni  $f \in L^2(0, 2\pi)$ , vale lo sviluppo in serie

$$\{P_N(x)\} \longrightarrow f(x) \quad \text{in } L^2(0, 2\pi), \quad N \rightarrow \infty.$$

Si dimostra poi che, se  $f \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R})$  (funzione  $C^1$  su  $\mathbb{R}$  e  $2\pi$ -periodica), allora si ha la convergenza in  $L^\infty$ .

### Applicazione all'equazione del calore

Una classica applicazione dello sviluppo di Fourier è la risoluzione dell'equazione del calore

$$u_t = u_{xx} \tag{12.1}$$

sull'intervallo  $[0, 2\pi]$ , con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0 & \text{(Dirichlet)} \\ u(0, x) = \varphi(x) & \text{(Cauchy)} \end{cases} .$$

Ciò equivale a studiare la diffusione di calore in una sbarra i cui estremi vengano mantenuti a temperatura costante. Ovviamente, occorre imporre al dato iniziale la condizione di compatibilità  $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0$ .

Per risolvere questo problema Fourier cerca una soluzione della forma

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \sin nx$$

dove le incognite sono le funzioni di una sola variabile  $v_n(t)$ . Calcolando le derivate otteniamo:

$$\begin{aligned} u_t &= \sum_{n=0}^{\infty} v'_n(t) \sin nx \\ u_x &= \sum_{n=0}^{\infty} n v_n(t) \cos nx \\ u_{xx} &= -\sum_{n=0}^{\infty} n^2 v_n(t) \sin nx \end{aligned}$$

e quindi sostituendo queste espressioni nella (12.1) ed eguagliando componente per componente,

$$v'_n = -n^2 v_n$$

In conclusione, troviamo la soluzione

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx), \quad c_n = v_n(0).$$

Per avere la convergenza di questa serie in  $L^2(0, 2\pi)$  basta che sia verificata la condizione  $\sum |c_n|^2 < \infty$ , mentre la condizione (più forte)  $\sum |c_n| < \infty$  assicura che la convergenza è uniforme.

## 12.2 Trasformata su $L^1$

Considereremo la trasformata di Fourier su tre spazi diversi

$$L^1 = L^1(\mathbb{R}^n), \quad L^2 = L^2(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Se  $n = 1$ , la trasformata di Fourier di una funzione  $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$  è definita da:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

dove  $x \in \mathbb{R}$  è la *variabile reale*, mentre  $\xi \in \mathbb{R}$  è detta *variabile duale*. Più in generale:

**Definizione 23.** [trasformata di Fourier] Per ogni  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  si definisce

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n.$$

**Osservazione 27.** Nella teoria della trasformata di Fourier occorre considerare funzioni a valori complessi, infatti, anche se  $f(x)$  è una funzione reale, la sua trasformata  $\widehat{f}(\xi)$  è in generale complessa. Se però  $f(x)$  è una funzione *reale e pari*, cioè verifica  $f(x) = f(-x)$ , anche  $\widehat{f}(\xi)$  risulta reale e pari.

Per ogni  $f \in L^1$  risulta

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\xi \cdot x} f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx,$$

quindi

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}. \quad (12.2)$$

Dunque la trasformata di Fourier definisce un operatore lineare e continuo

$$\mathcal{F}: L^1 \rightarrow L^\infty.$$

Un problema importante è quello di cercare di tornare alla funzione originale, ovvero fare l'anti-trasformata. L'ideale sarebbe disporre di una caratterizzazione semplice dello spazio  $\widehat{L^1} \equiv \mathcal{F}(L^1)$ , ma tale caratterizzazione manca. Notiamo tuttavia che, se  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , la trasformata  $\widehat{f}$  risulta continua su  $\mathbb{R}^n$ , dunque

$$\widehat{L^1} \subseteq \mathcal{C} \cap L^\infty.$$

Infatti, se  $\{\xi_k\} \rightarrow \xi$  in  $\mathbb{R}^n$  le funzioni  $\{e^{-i\xi_k \cdot x} f(x)\}$  convergono puntualmente verso  $e^{-i\xi \cdot x} f(x)$ , e quindi

$$\widehat{f}(\xi_k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi_k \cdot x} f(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx.$$

Abbiamo qui fatto ricorso al Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata: se  $\{\varphi_k(x)\} \rightarrow \varphi(x)$  puntualmente, e  $|\varphi_k(x)| \leq \psi(x)$  per qualche funzione  $\psi(x)$  sommabile su  $\mathbb{R}^n$ , allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx.$$

In particolare  $\mathcal{F}: L^1 \rightarrow L^\infty$  non è surgettiva. D'altra parte  $\mathcal{F}(L^1)$  non coincide neppure con  $\mathcal{C} \cap L^\infty$ , infatti:

**Teorema 29.** Per ogni  $f(x) \in L^1$ , la funzione  $\widehat{f}(\xi)$  è infinitesima all'infinito, cioè verifica

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx = 0. \quad (12.3)$$

In altri termini,  $\mathcal{F}(L^1) \subset \{\text{funzioni continue e infinitesime all'infinito su } \mathbb{R}^n\}$ .<sup>1</sup>

**Dim.** Ci limiteremo per semplicità al caso  $n = 1$  (il caso generale si tratta in modo analogo).

Se  $g \in \mathcal{C}_0^1$ , spazio delle funzioni  $\mathcal{C}^1$  a supporto compatto, la (12.3) è facile: integrando per parti si trova

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} g(x) dx = \frac{1}{-i\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-i\xi x})' g(x) dx = \frac{1}{i\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} g'(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{per } |\xi| \rightarrow \infty.$$

Nel caso generale, dato che  $\mathcal{C}_0^1$  è denso in  $L^1$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  possiamo trovare qualche funzione  $g \in \mathcal{C}_0^1$  per cui  $\|f - g\|_{L^1} \leq \varepsilon$ , e quindi, per la (12.2),  $\|\widehat{f} - \widehat{g}\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$ . Ma allora:

$$\maxlim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| \leq \maxlim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + \maxlim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{g}(\xi)| \leq \varepsilon + \maxlim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{g}(\xi)| = \varepsilon.$$

Per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si trova la (12.3). □

<sup>1</sup> Anche questa inclusione è propria: esistono funzioni continue e infinitesime all'infinito che non sono la trasformata di Fourier di nessuna funzione di  $L^1$ .

**Osservazione 28.** La precedente dimostrazione equivale a dire che

$$\{e^{-i\xi x}\} \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x) \quad \text{per } |\xi| \rightarrow \infty.$$

### 12.2.1 Principali proprietà

1. Per ogni  $f \in W^{1,1}$ , cioè  $f \in L^1$  con derivate deboli  $\partial_j f \in L^1$ , risulta

$$\widehat{\partial_j f}(\xi) = i \xi_j \widehat{f}(\xi).$$

Infatti, integrando per parti (vedi il Corollario al Teor. 24), troviamo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \partial_j f(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j (e^{-i\xi \cdot x}) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} i \xi_j e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx = i \xi_j \widehat{f}(\xi).$$

Più in generale, per ogni  $f \in W^{k,1}(\mathbb{R}^n)$  si ha:

$$\widehat{f^{(\alpha)}}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

Come conseguenza si vede che  $\widehat{f}(\xi)$  decade di ordine  $\geq k$  per  $|\xi| \rightarrow \infty$ :

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^k} \quad \forall |\xi| \geq 1.$$

Dunque le derivazioni si trasformano a moltiplicazioni per monomi; pertanto l'equazione differenziale a coefficienti costanti

$$P(\partial_x) u \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha u^{(\alpha)}(x) = f(x)$$

si trasforma nell'equazione algebrica

$$P(i\xi) \widehat{u}(\xi) \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi),$$

la cui soluzione si ottiene dividendo  $\widehat{f}(\xi)$  per il polinomio  $P(i\xi)$ . Ma per poter eseguire questa divisione occorre che questo polinomio non si annulli per  $\xi \in \mathbb{R}^n$  (condizione di *ellitticità*).

2. Consideriamo ora una funzione  $f \in L^1$  tale che  $x_j f(x) \in L^1$  per qualche  $j = 1, \dots, n$ . Si ha allora:

$$\widehat{x_j f}(\xi) = i \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\widehat{f}(\xi)).$$

La dimostrazione è semplice:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx \right\} = \int_{\mathbb{R}^n} -i x_j e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx.$$

### 3. Formula di Parseval

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \widehat{g}(y) dy, \quad \forall f, g \in L^1. \quad (12.4)$$

**Dim.** Sfruttando il teorema di Fubini-Tonelli, possiamo scrivere

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx \right\} g(\xi) d\xi = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-i\xi \cdot x} f(x) g(\xi) dx d\xi$$

e, quest'ultimo termine è simmetrico in  $f, g$ . □

4. Se consideriamo la convoluzione di due funzioni  $f, g \in L^1$ :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy$$

e ne facciamo la trasformata di Fourier, otteniamo

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \quad (12.5)$$

**Dim.** Esplicitiamo la trasformata della convoluzione scrivendola come un integrale doppio:

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right\} dx = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-i\xi \cdot x} f(x-y) g(y) dx dy.$$

Se scriviamo  $x = (x-y) + y$ , l'esponenziale diventa:

$$e^{i\xi \cdot x} = e^{-i\xi \cdot (x-y)} e^{-i\xi \cdot y},$$

e, sostituendo nella precedente espressione, troviamo

$$\iint e^{-i\xi \cdot x} f(x-y) g(y) dx dy = \iint e^{-i\xi \cdot (x-y)} f(x-y) e^{-i\xi \cdot y} g(y) dx dy.$$

Eseguendo un cambio di variabile e sfruttando Fubini-Tonelli, raggiungiamo la tesi.  $\square$

La formula (12.5) ci dice che l'algebra  $(L^1, *)$  viene trasformata, tramite Fourier, nell'algebra  $(L^\infty, \cdot)$ . In  $(L^1, *)$  manca l'identità: sarebbe la delta di Dirac, la cui trasformata è la funzione costante 1.

## 12.2.2 Esempi

1. La funzione caratteristica  $f(x)$  dell'intervallo  $[-1, 1]$  ha per trasformata di Fourier la funzione:

$$\widehat{f}(\xi) = 2 \int_0^1 \cos(\xi x) dx = \frac{2}{\xi} \int_0^\xi \cos x' dx' = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}$$

Osserviamo che

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

quindi il nostro risultato trova conferma nel fatto che  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 = \widehat{f}(0)$ .

Si noti che la  $f(x)$  è una funzione discontinua, mentre la sua trasformata è addirittura analitica intera dato che ammette uno sviluppo in serie di potenze con raggio di convergenza infinito:

$$\widehat{f}(\xi) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\xi^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Tuttavia  $\widehat{f}(\xi)$  non è assolutamente integrabile, in quanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sin(\xi)|}{\xi} d\xi \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

2. La *gaussiana*

$$G(x) = e^{-x^2/2}$$

appartiene allo spazio di Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Per calcolarne la trasformata di Fourier, iniziamo notando che poiché  $G(x)$  è reale e pari anche  $\widehat{G}(\xi)$  lo sarà. L'approccio diretto è cercare di calcolare l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x - x^2/2} dx.$$

Un approccio più semplice è notare che  $G$  verifica l'equazione differenziale:

$$G'(x) = -xG(x), \tag{12.6}$$

e, più precisamente, è l'unica soluzione di tale equazione a meno di costanti moltiplicative. Applicando la trasformata di Fourier ad entrambi i membri, e sfruttando le proprietà sopra elencate, troviamo

$$\widehat{G}' + x\widehat{G} = i\xi\widehat{G}(\xi) + i(\widehat{G})'(\xi) = 0.$$

Dunque anche  $\widehat{G}(\xi)$  soddisfa la (12.6), cosicché  $\widehat{G} = CG$ , dove  $C$  è una costante. Ricordando che  $\widehat{G}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) = \sqrt{2\pi}$ , possiamo ricavare il valore della costante:  $C = \sqrt{2\pi}$ . In conclusione:

$$\widehat{G}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}.$$

Nel caso di  $n$  variabili la gaussiana è il prodotto di  $n$  gaussiane unidimensionali, nel senso che

$$G(x) = e^{-|x|^2/2} \equiv G(x_1) \cdots G(x_n),$$

quindi la sua trasformata è il prodotto delle trasformate delle singole gaussiane:

$$\widehat{G}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n)} G(x_1) \cdots G(x_n) dx = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_j x_j} G(x_j) dx_j = (\sqrt{2\pi})^n e^{-|\xi|^2/2}.$$

### 12.3 Trasformata su $\mathcal{S}$

Accanto allo spazio

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}_{L^\infty} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : x^\alpha \partial^\beta \varphi \in L^\infty \quad \forall \alpha, \beta\}$$

possiamo introdurre

$$\mathcal{S}_{L^1} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : x^\alpha \partial^\beta \varphi \in L^1 \quad \forall \alpha, \beta\}$$

**Proposizione 14.**

$$\mathcal{S}_{L^\infty} = \mathcal{S}_{L^1}$$

**Dim.** Utilizzando la formula di Leibniz si trova che, per certe costanti  $C(\alpha, \beta, \gamma)$ ,

$$\partial^\beta (x^\alpha u) = \sum_{\gamma \leq \{\alpha, \beta\}} C(\alpha, \beta, \gamma) x^{\alpha-\gamma} \partial^{\beta-\gamma} u,$$

quindi entrambi gli spazi  $\mathcal{S}_{L^\infty}$  e  $\mathcal{S}_{L^1}$  sono stabili sia per derivazione che per moltiplicazione con monomi; di conseguenza, nelle definizioni di questi spazi, possiamo invertire l'ordine fra la derivazione  $\partial^\alpha$  e la moltiplicazione per  $x^\beta$ . Ora, dalla identità (10.3) segue che

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \max_{|\gamma| \leq n} \|\partial^\gamma u\|_{L^1}$$

e quindi, per  $u = \partial^\beta (x^\alpha \varphi)$ , deduciamo che  $\mathcal{S}_{L^\infty} \subseteq \mathcal{S}_{L^1}$ .

Per provare l'inclusione inversa notiamo che, se  $x^\gamma v(x) \in L^\infty$  per  $|\gamma| \leq n+1$ , allora  $|v(x)| \leq C(1+|x|)^{-(n+1)}$  e quindi  $v \in L^1$ . Di conseguenza :

$$\|v\|_{L^1} \leq C \max_{|\gamma| \leq n+1} \|x^\gamma v\|_{L^\infty}.$$

Prendendo  $v = x^\alpha \partial^\beta \varphi$ , concludiamo che  $\mathcal{S}_{L^1} \subseteq \mathcal{S}_{L^\infty}$ .

Dalle stime precedenti, segue anche che la convergenza in  $\mathcal{S}$  può essere equivalentemente descritta usando in (11.6) la convergenza in  $L^1$  anziché quella in  $L^\infty$ .  $\square$

**Corollario.** *La trasformata di Fourier definisce un operatore continuo  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .*

**Dim.** Se  $\varphi \in \mathcal{S}_{L^1}$  allora  $x^\alpha \partial_x^\beta \varphi \in L^1$  per ogni  $\alpha, \beta$ ; quindi, dato che  $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$ ,

$$\partial_\xi^\alpha (\xi^\beta \widehat{\varphi}(\xi)) = i^{-|\alpha+\beta|} \widehat{x^\alpha \partial_x^\beta \varphi} \in L^\infty.$$

Dunque  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}_{L^\infty}$  cioè  $\mathcal{F} : \mathcal{S}_{L^1} \rightarrow \mathcal{S}_{L^\infty}$ . La continuità segue dall'ultima parte della Dim. precedente.  $\square$

**Teorema 30. [formula di inversione]** *Per ogni  $u \in L^1$  tale che  $\widehat{u} \in L^1$  si ha*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \widehat{u}(\xi) d\xi. \quad (12.7)$$

Per la dimostrazione si veda K. Yosida *Functional Analysis*, Springer 1969.

L'operatore

$$\mathcal{G} : v(x) \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} v(x) dx \quad (12.8)$$

viene chiamato *trasformata di Fourier inversa*, in quanto  $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = Id$ . Si noti che  $\mathcal{G}$  differisce da  $\mathcal{F}$  solo per la costante moltiplicativa e per il segno nell'esponente, dunque :

$$(\mathcal{G}v)(\xi) = (2\pi)^{-n} \widehat{v}(-\xi). \quad (12.9)$$

**Corollario 1.** *Se  $u(x) \in L^1$  è tale che  $\widehat{u}(\xi) \in L^1$ , allora  $u(x)$  risulta continua.*

**Dim.** Segue subito dalla (12.9) e dalla continuità di  $\widehat{\varphi}(\xi)$  per  $\varphi \in L^1$ .

**Corollario 2.** *La trasformata di Fourier  $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$  è un'applicazione iniettiva*

**Dim.** Se  $\widehat{u}(\xi) \equiv 0$ , dalla (12.7) segue subito che  $u(x) \equiv 0$  per ogni  $x$ .

**Corollario 3.** *La trasformata di Fourier  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  è un isomorfismo.*

**Dim.** Per provare che  $\mathcal{F}$  è surgettiva basta notare che  $G$ , al pari di  $\mathcal{F}$ , opera sullo spazio  $\mathcal{S}$ .

**Osservazione 29.** Per verificare la correttezza della costante moltiplicativa  $(2\pi)^{-n}$  nella formula d'inversione, basta applicare tale formula alla Gaussiana  $G(x) = \exp\{-|x|^2/2\}$ , ricordando che  $\widehat{G} = (2\pi)^{n/2}G$ .

## 12.4 Trasformata su $L^2$

Dalla formula di inversione (12.7) si ricava, passando ai complessi coniugati,

$$\overline{u(x)} = (2\pi)^{-n} \int e^{i\xi \cdot x} \widehat{u}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n} \int e^{i\xi \cdot x} \overline{\widehat{u}(\xi)} d\xi = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\xi \cdot x} \widehat{\overline{u}}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-n} \widehat{\widehat{\overline{u}}}(x)$$

ovvero :

$$u = (2\pi)^{-n} \widehat{\widehat{\overline{u}}}.$$

In altri termini, l'operatore  $\overline{\mathcal{F}}$  verifica  $\overline{\mathcal{F}}^2 = \overline{\mathcal{F}}$  a meno di una costante moltiplicativa.

Grazie a questa formula siamo in grado di definire la trasformata di Fourier  $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ , ottenendo un isomorfismo. Infatti, dall'identità di Parseval sappiamo che

$$\int \widehat{u}(x) v(x) dx = \int u(y) \widehat{v}(y) dy \quad \forall u, v \in L^1,$$

e quindi, per ogni  $u, v \in \mathcal{S}$ , abbiamo:

$$(\widehat{u}, \widehat{v})_{L^2} = \int \widehat{u} \overline{\widehat{v}} dx = \int u \overline{\widehat{\widehat{v}}} dy = (2\pi)^n \int u \overline{v} dy = (2\pi)^n (u, v)_{L^2}. \quad (12.10)$$

In particolare otteniamo la **identità di Plancherel**, cioè

$$\|\widehat{u}\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2} \|u\|_{L^2}, \quad \forall u \in \mathcal{S},$$

che mostra come, a meno di un fattore moltiplicativo,  $\mathcal{F}$  è un'isometria su  $\mathcal{S}$  rispetto alla norma  $L^2$ .

Ma  $\mathcal{S}$  è denso in  $L^2$ , cioè per ogni  $u \in L^2$  esiste una successione  $\{v_k\} \subset \mathcal{S}$  che converge ad  $u$  in  $L^2$ , pertanto

$$\|v_h - v_k\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } h, k \rightarrow \infty,$$

e quindi anche

$$\|\widehat{v}_h - \widehat{v}_k\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } h, k \rightarrow \infty.$$

In conclusione, dato che  $L^2$  è uno spazio completo, esisterà qualche  $f \in L^2$  per cui  $\{\widehat{v}_k\} \rightarrow f$  in  $L^2$ . Questa funzione  $f$  viene chiamata la trasformata di Fourier di  $u$  e si scrive  $\widehat{u} = f$ . In formula:

$$\widehat{u} = L^2 - \lim_{\{u_k\} \xrightarrow{L^2} u} \{\widehat{u}_k\}.$$

La definizione classica di  $\widehat{u}$  per  $u \in L^2$  non ha senso, poiché  $e^{-i\xi \cdot x} u(x)$  non è in generale una funzione integrabile su  $\mathbb{R}^n$ . Notiamo che l'operatore  $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$  sopra definito è un isomorfismo, anzi un'isometria, in quanto la (12.10) si estende per continuità ad ogni coppia di funzioni  $u, v \in L^2$ .

Ricapitolando: abbiamo definito la trasformata di Fourier in questi spazi:

$$\mathcal{S} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{S}, \quad L^1 \xrightarrow{\mathcal{F}} L^\infty, \quad L^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} L^2.$$

Possiamo anche verificare che  $\mathcal{F}$  si applica agli spazi  $L^p$  con  $p \leq 2$ , e precisamente:

$$\mathcal{F} : L^p \rightarrow L^q \quad \text{dove } 1 \leq p \leq 2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

## 12.5 Trasformata su $\mathcal{S}'$

L'applicazione  $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$  può essere estesa allo spazio  $\mathcal{S}'$  delle distribuzioni temperate, tramite un procedimento di dualità:

**Definizione 24.** [trasformata su  $\mathcal{S}'$ ] Per ogni  $\tau \in \mathcal{S}'$  si definisce la distribuzione  $\widehat{\tau} \in \mathcal{S}'$  ponendo

$$\langle \widehat{\tau}, \varphi \rangle = \langle \tau, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Notiamo che, per la continuità dell'operatore  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ , risulta che

$$\forall \{\varphi_k\} \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \implies \langle \widehat{\tau}, \varphi_k \rangle \equiv \langle \tau, \widehat{\varphi}_k \rangle \rightarrow 0$$

e dunque  $\widehat{\tau} \in \mathcal{S}'$ . In conclusione resta definita l'applicazione lineare:

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'.$$

### Osservazione 1.

Dalla formula di Parseval segue che questa applicazione  $\mathcal{F}$ , ristretta allo spazio  $L^1 \subset \mathcal{S}'$ , coincide con la classica trasformata di Fourier.

**Osservazione 2.** Dalla formula d'inversione segue che  $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$  è un isomorfismo. Dalla def. segue che

$$\tau = (2\pi)^{-n} \widehat{\widehat{\tau}}, \quad \forall \tau \in \mathcal{S}',$$

dove la *coniugata* di una distribuzione  $\tau \in \mathcal{D}'$  viene definita per dualità, cioè ponendo

$$\langle \bar{\tau}, \varphi \rangle = \overline{\langle \tau, \bar{\varphi} \rangle}, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

## Esempi.

- *Trasformata di Fourier della Delta di Dirac.*

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S},$$

quindi

$$\widehat{\delta} = 1.$$

Più in generale, se  $\delta_a$  è la Delta in un punto  $a \in \mathbb{R}^n$ , risulta

$$\widehat{\delta}_a = e^{-ia \cdot x}.$$

Si noti che  $\delta_a \in \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$  mentre  $e^{-ia \cdot x} \in L^1_{\text{loc}} \cap \mathcal{S}'$ .

- *Trasformata di Fourier della costante 1*

Dalla formula d'inversione si ricava:

$$\widehat{1} = (2\pi)^n \delta.$$

- *Trasformata di Fourier di un polinomio.*

Per  $x \in \mathbb{R}$ , abbiamo

$$\widehat{x^k} = \widehat{x^k \cdot 1} = i^k \partial_{\xi}^k (\widehat{1}) = (2\pi)^n i^k \delta^{(k)},$$

quindi

$$P(x) = \sum_{k=0}^N c_k x^k \implies \widehat{P(x)} = (2\pi)^n (c_0 \delta + c_1 i \delta' + \dots + c_k i^k \delta^{(k)}).$$

- *Trasformata di Fourier sugli spazi di Sobolev.*

Ricordiamo che  $\varphi \in H^k$  se e solo se  $\partial_x^\alpha \varphi \in L^2$  per ogni  $|\alpha| \leq k$ . Da ciò ricaviamo che

$$\widehat{H}^k = \left\{ f \in L^2 : (1 + |\xi|)^k f(\xi) \in L^2 \right\}, \quad \widehat{H}^{-k} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : (1 + |\xi|)^{-k} f(\xi) \in L^2 \right\}.$$

- *Trasformata di Fourier delle distribuzioni a supporto compatto*

La trasformata di Fourier di una distribuzione  $\tau \in \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$  è una distribuzione di tipo funzione, che ammette la seguente semplice espressione (si noti che  $e^{-i\xi x} \in \mathcal{E}$ ):

$$\widehat{\tau}(\xi) = \langle \tau(x), e^{-i\xi \cdot x} \rangle.$$

Pertanto  $\widehat{\tau}(x)$  è una funzione analitica intera, in concordanza col Teor. di Paley-Wiener (vedi sotto)

**Osservazione 30.** Dall'espressione della trasformata di Fourier di un polinomio, si ricava un'espressione formale della possibile trasformata di Fourier della funzione esponenziale:

$$\widehat{e^x} = \delta + i\delta' + i^2 \frac{\delta''}{2} + \dots + i^n \frac{\delta^{(n)}}{n!} + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{\delta^{(n)}}{n!}.$$

Purtroppo questa serie non converge (neppure del senso delle distribuzioni) e quindi la distribuzione  $\widehat{e^x}$  non è ben definita. Del resto abbiamo già notato che  $e^x \notin \mathcal{S}'$  e quindi la sua trasformata di Fourier non è definibile (almeno nell'ambito delle distribuzioni)

## 12.6 Teorema di Paley-Wiener

Se  $f(x)$  è una funzione di  $L^1(\mathbb{R}^n)$  a supporto compatto, la sua trasformata di Fourier  $\widehat{f}(\xi)$  ha senso per ogni  $\xi \in \mathbb{C}^n$  e non solo per  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Infatti, se  $f(x) \equiv 0$  fuori della palla  $B_r$ , l'integrale

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\zeta \cdot x} f(x) dx \equiv \int_{B_r} e^{-i\zeta \cdot x} f(x) dx$$

è convergente per ogni  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ . Precisamente, posto  $\Im\zeta = (\Im\zeta_1, \dots, \Im\zeta_n) \in \mathbb{R}^n$ , si ha

$$|\widehat{f}(\zeta)| \leq \sup_{|x| \leq r} |e^{-i\zeta \cdot x}| \|f\|_{L^1} = e^{r|\Im\zeta|} \|f\|_{L^1}.$$

E' anche facile convincersi che  $\widehat{f}(\zeta)$  è una *funzione olomorfa* su  $\mathbb{C}^n$ .

La cosa interessante è che vale anche il viceversa, cioè dal tipo di crescita esponenziale della trasformata di Fourier (estesa a  $\mathbb{C}^n$ ) possiamo ricavare una stima del supporto della funzione  $f(x)$ .

Un risultato analogo vale per le distribuzioni. Infatti la trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto compatto  $\tau$  può essere equivalentemente definita ponendo

$$\widehat{\tau}(\zeta) = \langle \tau(x), e^{-i\zeta \cdot x} \rangle, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n \quad (12.11)$$

e la distribuzione temperata  $\widehat{\tau}(\zeta)$  è in realtà una funzione olomorfa intera su  $\mathbb{C}^n$ .

### **Teorema 31. [Paley-Wiener]**

i) Se  $f(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ha supporto contenuto nella palla  $B_r$ , la sua trasformata di Fourier ha un'estensione olomorfa intera su  $\mathbb{C}^n$  che verifica la stima

$$|\widehat{f}(\zeta)| \leq C_N (1 + |\zeta|)^{-N} e^{r|\Im\zeta|} \quad \text{per ogni intero } N, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n. \quad (12.12)$$

Viceversa, ogni funzione intera verificante una stima come la (12.12) è la trasformata di Fourier di una  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  con supporto contenuto nella palla  $B_r$ .

ii) Se  $\tau$  è una distribuzione su  $\mathbb{R}^n$  con supporto in  $B_r$ , la sua trasformata di Fourier è una funzione olomorfa intera su  $\mathbb{C}^n$  tale che

$$|\widehat{\tau}(\zeta)| \leq C (1 + |\zeta|)^N e^{r|\Im\zeta|} \quad \text{per qualche intero } N, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n. \quad (12.13)$$

Viceversa, ogni funzione intera verificante una stima come la (12.13) è la trasformata di Fourier di una distribuzione con supporto in  $B_r$ .

**Dim.** Per la dimostrazione si veda K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer 1969.

## 12.7 Applicazioni alle equazioni differenziali

La trasformata di Fourier si applica solo alle equazioni differenziali *lineari a coefficienti costanti*.

### 12.7.1 Equazioni ordinarie

Consideriamo dapprima l'equazione differenziale ordinaria nell'incognita  $y = y(x)$ :

$$y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \dots + a_m y = 0, \quad a_j \in \mathbb{C}. \quad (12.14)$$

Se si pone  $v(\xi) = \widehat{y}(\xi)$ , questa equazione diventa:

$$(i\xi)^m v(\xi) + a_1 (i\xi)^{m-1} v(\xi) + \dots + a_m v(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

cioè

$$P(\xi) v(\xi) = 0, \quad (12.15)$$

dove  $P(\xi)$  è il *polinomio caratteristico* dell'equazione (12.14), cioè

$$P(\xi) = a_0 (i\xi)^m + a_1 (i\xi)^{m-1} + \dots + a_m.$$

Cerchiamo di risolvere l'equazione algebrica (12.15). Si potrebbe pensare che non esista alcuna soluzione se non quella banale  $v(\xi) \equiv 0$ , ma non dobbiamo dimenticare che il polinomio caratteristico può annullarsi.

Se  $P(\xi) \neq 0$  per ogni  $\xi \in \mathbb{R}$ , l'equazione (12.14) non ammette alcuna soluzione  $y(x) \in \mathcal{S}'$  tranne quella nulla. Se invece  $P(\xi)$  si annulla nei punti  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}$ , la distribuzione  $v(\xi)$  ha il supporto concentrato in questi punti, e allora (dalla teoria delle distribuzioni) si vede che  $v(\xi)$  è una combinazione lineare a coefficienti costanti delle Deltte di Dirac  $\delta(\xi - \xi_1), \dots, \delta(\xi - \xi_k)$  e delle loro derivate fino ad un certo ordine. Eseguendo l'anti-trasformata di  $v(\xi)$ , si conclude che le soluzioni di (12.14) sono combinazioni lineari a coefficienti polinomiali di funzioni esponenziali, cioè funzioni del tipo:

$$u(x) = P_1(x) e^{i\xi_1 x} + \dots + P_k(x) e^{i\xi_k x}.$$

### 12.7.2 Equazione di Laplace

Torniamo ora alle EDP: tramite la trasf. di Fourier, vogliamo ritrovare quanto ottenuto nella sezione 3.2. Precisamente, dato l'operatore di Laplace su  $\mathbb{R}^n$ , e supponendo  $n \geq 3$  (il caso  $n = 2$  richiede una trattazione a parte) cerchiamo una soluzione fondamentale, cioè una distribuzione  $E(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  tale che

$$\Delta E \equiv \partial_{x_1}^2 E + \dots + \partial_{x_n}^2 E = \delta. \quad (12.16)$$

Eseguendo la trasformata di Fourier, dalla (12.16) troviamo l'equazione algebrica

$$-|\xi|^2 \widehat{E}(\xi) = 1,$$

la quale ammette, fra le sue soluzioni, la funzione

$$\widehat{E}(\xi) = \frac{-1}{|\xi|^2}. \quad (12.17)$$

Si noti che  $\widehat{E}$  appartiene a  $L^\infty(\mathbb{R}_\xi^n)$  e quindi anche alla classe  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_\xi^n)$ .

Facciamo ora una digressione:

### 12.7.3 Trasformata di Fourier di una funzione radiale

Le *funzioni radiali* sono quelle del tipo

$$f(x) = F(\rho) \quad \text{con } \rho = |x|.$$

Per eseguire la trasformata di Fourier di una tale funzione, notiamo che:

1. Se  $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ ,  $\lambda > 0$ ,

$$\widehat{f}_\lambda(\xi) = \int e^{-i\xi \cdot x} f(\lambda x) dx = \int e^{-i\xi \cdot y/\lambda} f(y) \lambda^{-n} dy = \lambda^{-n} \widehat{f}(\xi/\lambda).$$

2. Più in generale, se  $f_M(x) = f(Mx)$ , con  $M$  matrice  $n \times n$  invertibile, allora

$$\widehat{f}_M(\xi) = |\det M|^{-1} \int e^{-i\xi \cdot M^{-1}y} f(y) dy = |\det M|^{-1} \widehat{f}((M^{-1})^t \xi).$$

3. Una funzione  $f(x)$  è radiale se e solo se

$$f_M(x) = f(x) \quad \text{per ogni matrice ortogonale } M \in SO(n).$$

4. Se  $f(x)$  è radiale, anche la sua trasformata  $\widehat{f}(\xi)$  è radiale. Infatti, per ogni matrice ortogonale  $M$  risulta  $MM^t = Id$ , in particolare  $|\det M| = 1$ , e allora, per il punto 2,  $\widehat{f}_M = \widehat{f}_M = \widehat{f}$ .

Consideriamo ora la funzione radiale  $f(x) = |x|^{-k}$ , con  $0 < k < n$ . Tale funzione è omogenea di grado  $-k$ :

$$f(\lambda x) = \lambda^{-k} f(x) \quad \forall \lambda > 0,$$

e allora, per la prima delle osservazioni precedenti vediamo che

$$\widehat{f}(\xi/\lambda) = \lambda^n \widehat{f}_\lambda(\xi) = \lambda^{n-k} \widehat{f}(\xi).$$

Dunque  $\widehat{f}(\xi)$  è radiale ed omogenea di grado  $-(n-k)$ . Poichè la sola funzione  $g(\xi)$ , radiale ed omogenea di grado  $h$  è (a meno di una costante moltiplicativa) la funzione  $g(\xi) = |\xi|^h$ , abbiamo provato che

$$f(x) = |x|^{-k} \iff \widehat{f}(\xi) = C |\xi|^{-(n-k)}$$

dove  $C = C(n,k)$  è una costante (che potremmo determinare). Osserviamo anche che, per  $0 < h < n$ ,  $|x|^{-h} \in L^1_{\text{loc}}$ ; dunque nel nostro caso abbiamo  $u, \widehat{u} \in L^1_{\text{loc}}$ .

Tornando alla (12.17), otteniamo una soluzione  $E \in \mathcal{S}'$  dell'equazione (12.16), in dimensione  $n \geq 3$ :

$$E(x) = \frac{C_n}{|x|^{n-2}}$$

Aggiungendo a questa soluzione una qualunque funzione armonica si ottengono tutte le altre soluzioni.

### 12.7.4 Equazione del calore

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Per trovare la soluzione non conviene fare la trasformata di Fourier in tutte le variabili, ma solo nelle variabili spaziali  $x \in \mathbb{R}^n$ . Definiamo cioè la funzione

$$v(\xi, t) = \int e^{-i\xi \cdot x} u(x, t) dx.$$

L'eq. del calore si trasforma allora in un'equazione differenziale ordinaria nella variabile  $t$ , dipendente dal parametro  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , e quindi il relativo problema di Cauchy diventa :

$$\begin{cases} v'(\xi, t) = -|\xi|^2 v(\xi, t) \\ v(\xi, 0) = v_0(\xi) \equiv \widehat{u_0}(\xi), \end{cases}$$

dove  $v' = \partial v / \partial t$ . La soluzione è allora

$$v(\xi, t) = v_0(\xi) e^{-t|\xi|^2}.$$

Avendo risolto il problema nello spazio delle variabili  $\xi$ , dobbiamo tornare indietro alle variabili  $x$ .

Notiamo che per  $t \leq 0$  abbiamo grossi problemi dal momento che  $e^{-t|\xi|^2}$  diverge. Per  $t > 0$  possiamo tranquillamente anti-trasformare. Se partiamo dal problema di Cauchy con dato iniziale la Delta, cioè

$$\begin{cases} U_t = \Delta U & (t > 0), \\ U(x, 0) = \delta(x) \end{cases}$$

e poniamo  $V(\xi, t) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} U(x, t)$ , troviamo infatti

$$V(\xi, t) = e^{-t|\xi|^2},$$

da cui anti-trasformando (e ricordando le formule relative alle Gaussiane) ricaviamo

$$U(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}.$$

Per un generico dato iniziale  $U(x, 0) = u_0(x)$ , la soluzione si ottiene per convoluzione :

$$u(x, t) = \int U(x - y, t) u_0(y) dy.$$

### 12.7.5 Equazione delle onde

Consideriamo il problema di Cauchy per l'operatore di d'Alembert in  $n$  dimensioni spaziali:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \end{cases} \quad (12.18)$$

Ponendo  $v(\xi, t) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \{u(x, t)\}$ ,  $v_0(\xi) = \widehat{u_0}(\xi)$ ,  $v_1(\xi) \equiv \widehat{u_1}(\xi)$ , otteniamo il problema ordinario

$$\begin{cases} v'' + |\xi|^2 v = 0, \\ v(\xi, 0) = v_0(\xi), \quad v'(\xi, 0) = v_1(\xi). \end{cases} \quad (12.19)$$

Questo problema ha per soluzione la funzione

$$v(\xi, t) = A(\xi) e^{-it|\xi|} + B(\xi) e^{it|\xi|} \quad (12.20)$$

la cui derivata temporale è

$$v'(\xi, t) = i|\xi| \left\{ -A(\xi) e^{-it|\xi|} + B(\xi) e^{it|\xi|} \right\}.$$

Per  $t = 0$ , troviamo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} v_0(\xi) = A(\xi) + B(\xi) \\ v_1(\xi) = i|\xi| \left\{ -A(\xi) + B(\xi) \right\} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A(\xi) = \frac{1}{2} \left\{ v_0(\xi) - \frac{v_1(\xi)}{i|\xi|} \right\} \\ B(\xi) = \frac{1}{2} \left\{ v_0(\xi) + \frac{v_1(\xi)}{i|\xi|} \right\} \end{cases}$$

e quindi, sostituendo nella (12.20),

$$v(\xi, t) = \frac{1}{2} \left( v_0(\xi) - \frac{v_1(\xi)}{i|\xi|} \right) e^{-it|\xi|} + \frac{1}{2} \left( v_0(\xi) + \frac{v_1(\xi)}{i|\xi|} \right) e^{it|\xi|}.$$

Infine, raccogliendo  $v_0$  e  $v_1$ , troviamo la soluzione del problema (12.19):

$$v(\xi, t) = K_0(\xi, t) v_0(\xi) + K_1(\xi, t) v_1(\xi) \quad (12.21)$$

dove i *nuclei*  $K_j(\xi, t)$  sono così definiti:

$$K_0 = \frac{e^{it|\xi|} + e^{-it|\xi|}}{2} \equiv \cos(t|\xi|), \quad K_1 = \frac{e^{it|\xi|} - e^{-it|\xi|}}{2i|\xi|} \equiv \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}.$$

Notiamo infine che, per qualche  $C(t)$ , si ha

$$|K_0(\xi, t)| \leq 1, \quad |K_1(\xi, t)| \leq \frac{C(t)}{1 + |\xi|}. \quad (12.22)$$

In dimensione spaziale  $n \geq 2$ , il ritorno al problema di partenza è complicato perché non è facile fare l'anti-trasformata della funzione  $e^{-it|\xi|}$ . Comunque la formula (12.21), anche se non dà la forma esatta delle soluzioni, ci fornisce delle stime che consentono di provare l'esistenza delle soluzioni e la loro natura.

**Teorema 32. [buona positura negli spazi di Sobolev]**

Per ogni coppia di dati iniziali  $(u_0, u_1) \in H^{k+1} \times H^k$  il problema di Cauchy per l'equazione delle onde ammette una ed una sola soluzione tale che

$$u(x, t) \in H^{k+1}, \quad u_t(x, t) \in H^k, \quad \forall t \geq 0.$$

**Dim.** Ricordando che

$$\widehat{H}^k = \left\{ f(\xi) \in L^2 : (1 + |\xi|)^k f(\xi) \in L^2 \right\},$$

in virtù della (12.22) troviamo

$$\begin{aligned} (u_0(x), u_1(x)) \in H^{k+1} \times H^k &\implies (v_0(\xi), v_1(\xi)) \in \widehat{H}^{k+1} \times \widehat{H}^k \implies \\ &\implies (v(\xi, t), v'(\xi, t)) \in \widehat{H}^{k+1} \times \widehat{H}^k \implies (u(x, t), u_t(x, t)) \in H^{k+1} \times H^k. \end{aligned}$$

□

**Teorema 33. [velocità finita di propagazione]**

Se i dati iniziali  $u_0(x), u_1(x)$  sono distribuzioni con supporto contenuto nella palla di raggio  $r_0$ , la soluzione  $u(x, t)$  all'istante  $t$  ha supporto contenuto nella palla di raggio  $r_0 + t$ .

**Dim.** In vista del Teor. di Paley-Wiener, sostituiamo il problema di Cauchy (12.19) con l'analogo problema in cui  $\xi \in \mathbb{R}^n$  è rimpiazzato da  $\zeta \in \mathbb{C}^n$ . Precisamente, ricordando che le trasformate di Fourier dei dati iniziali,  $v_0 = \widehat{u_0}$ ,  $v_1 = \widehat{u_1}$ , si estendono in modo olomorfo a funzioni intere su  $\mathbb{C}^n$  (nel senso della (12.11)), consideriamo il problema

$$\begin{cases} v'' + (\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2) v = 0 \\ v(\zeta, 0) = v_0(\zeta), \quad v'(\zeta, 0) = v_1(\zeta). \end{cases}$$

La soluzione  $v(\zeta, t)$  è una funzione olomorfa intera in  $\zeta$  della forma

$$v(\zeta, t) = A(\zeta) e^{-i\tau t} + B(\zeta) e^{i\tau t},$$

con  $A = \frac{1}{2}(v_0 - v_1/i\tau)$ ,  $B = \frac{1}{2}(v_0 + v_1/i\tau)$ , dove  $\tau \equiv \tau(\zeta) \in \mathbb{C}$  è una radice dell'equazione algebrica

$$\tau^2 = \zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2. \quad (12.23)$$

Si ha allora:

$$|v(\zeta, t)| \leq \left\{ |A(\zeta)| + |B(\zeta)| \right\} e^{t|\Im\tau|}.$$

mentre, applicando Paley-Wiener ai dati iniziali, vediamo che, per qualche  $N$ ,

$$|A(\zeta)| \leq C_0(1 + |\zeta|)^N e^{r_0|\Im\zeta|}, \quad |B(\zeta)| \leq C_1(1 + |\zeta|)^N e^{r_0|\Im\zeta|}.$$

A questo punto facciamo ricorso al seguente

**Lemma.** *Il numero complesso  $\tau$  definito dalla (12.23) verifica la stima*

$$(\Im\tau)^2 \leq (\Im\zeta_1)^2 + \dots + (\Im\zeta_n)^2.$$

**Dim. del Lemma:** Posto  $\tau = x + iy$ ,  $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ , (cioè  $\zeta = \xi + i\eta$ ) la (12.23) diventa:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = |\xi|^2 - |\eta|^2 \\ 2xy = 2\xi \cdot \eta \end{cases} \quad (12.24)$$

Dobbiamo provare che  $y^2 \leq |\eta|^2$ : se fosse  $|\eta|^2 < y^2$ , per la prima delle eguaglianze (12.24) dovrebbe risultare anche  $|\xi|^2 < x^2$ , ma allora avremmo

$$|\xi \cdot \eta| \leq |\xi| |\eta| \leq |x| |y| = |xy|,$$

in contrasto con la seconda delle eguaglianze (12.24). □

**Conclusione della dim. del Teor. 33:** La soluzione  $v(\zeta, t)$  verifica una stima del tipo

$$|v(\zeta, t)| \leq C(1 + |\zeta|)^N e^{(r_0+t)|\Im\zeta|}.$$

e quindi, applicando di nuovo Paley-Wiener (nel verso opposto a prima), vediamo che il supporto di  $u(x, t)$  è contenuto nella palla di raggio  $r_0 + t$ , che è la tesi del Teorema 33. □

**Il caso  $n = 1$**

Nel caso uni-dimensionale possiamo trovare la soluzione esplicita del problema (12.18). Conviene però procedere in modo un pò diverso da prima: Partendo sempre dall'equazione  $v'' + \xi^2 v = 0$ , dove ora  $\xi \in \mathbb{R}$ , prendiamo come base di soluzioni le funzioni  $e^{\pm i\xi}$  (anziché le  $e^{\pm i|\xi|}$ ). Procedendo come sopra, perveniamo allora all'equazione (12.21) dove

$$K_0 = \frac{e^{it\xi} + e^{-it\xi}}{2}, \quad K_1 = \frac{e^{it\xi} - e^{-it\xi}}{2i\xi}.$$

A questo punto è facile fare l'anti-trasformata: basta ricordare che

$$e^{-ia\xi} = \mathcal{F}\{\delta_a\}.$$

Indicando con  $\chi_{[-t,t]}(x)$  la funzione caratteristica dell'intervallo  $[-t, t]$  ricaviamo

$$K_0(\xi) \equiv \frac{e^{it\xi} + e^{-it\xi}}{2} = \mathcal{F}\{\delta(x+t) - \delta(x-t)\},$$
$$K_1(\xi) \equiv \frac{e^{it\xi} - e^{-it\xi}}{2i\xi} = \mathcal{F}\{\chi_{[-t,t]}(x)\},$$

e quindi, convolvendo con i dati iniziali  $u_0(x), u_1(x)$ , ritroviamo la (5.4), cioè la formula di d'Alembert per l'equazione della corda vibrante.

## Capitolo 13

# Problemi ben posti secondo Hadamard

### 13.1 Il caso modello

Negli anni '20 del secolo scorso, Jacques Hadamard, allo scopo di mostrare che il problema di Cauchy per un'equazione ellittica non è ben posto, considera l'equazione di Laplace

$$\begin{cases} u_{tt} = -u_{xx} \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \end{cases} \quad (13.1)$$

nel piano reale  $(x, t)$ , confrontandola con l'equazione di d'Alembert

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x). \end{cases} \quad (13.2)$$

Il punto di partenza sono le due soluzioni

$$u(x, t) = e^t \cos x, \quad v(x, t) = \cos t \cos x.$$

Concentriamoci sull'equazione ellittica. A partire dalla soluzione  $u(x, t)$ , per ogni successione  $\{\varepsilon_k\}$  di numeri reali, anche le funzioni

$$u_k(x, t) = \varepsilon_k u(kx, kt) \equiv \varepsilon_k e^{kt} \cos(kx), \quad k = 1, 2, \dots$$

sono soluzioni dell'equazione di Laplace, con dati iniziali

$$u_k|_{t=0} = \varepsilon_k \cos(kx), \quad \partial_t u_k|_{t=0} = \varepsilon_k k \cos(kx).$$

Scegliamo ora una successione  $\{\varepsilon_k\}$  che converga a zero più velocemente di ogni polinomio ma meno velocemente di un'esponenziale, per esempio  $\varepsilon_k = e^{-\sqrt{k}}$ . Per  $k \rightarrow \infty$  avremo allora, per ogni  $j \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \partial_x^j u_k(x, 0) \right| &= \left| \partial_x^j \left( e^{-\sqrt{k}} \cos(kx) \right) \right| = e^{-\sqrt{k}} k^j \left| \frac{\cos(kx)}{\sin(kx)} \right| \rightarrow 0, \\ \left| \partial_x^j \partial_t u_k(x, 0) \right| &= k \left| \partial_x^j \left( e^{-\sqrt{k}} \cos(kx) \right) \right| = e^{-\sqrt{k}} k^{j+1} \left| \frac{\cos(kx)}{\sin(kx)} \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

mentre nel punto  $x = 0$  risulta

$$\{u_k(0, t)\} = \{e^{-\sqrt{k}} e^{kt}\} \rightarrow +\infty \quad \forall t > 0.$$

In altre parole, tutte le derivate rispetto ad  $x$  dei dati iniziali tendono uniformemente a 0 su  $\mathbb{R}$ , quindi

$$\{u_k(x, 0)\} \rightarrow 0, \quad \{\partial_t u_k(x, 0)\} \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),$$

mentre, non appena  $t$  diventa maggiore di 0, la successione  $\{u_k(x, t)\}$  delle soluzioni non converge a 0 in  $\mathcal{C}^\infty$  (e neppure in  $\mathcal{C}$ ). Ciò significa che l'*applicazione risolvente*, che associa alla coppia dei dati iniziali la soluzione all'istante  $t > 0$ , non è continua nello spazio  $\mathcal{C}^\infty$ . Si parla allora di *problema mal posto*.

Si noti che, al contrario della (13.1), l'equazione (13.2) non presenta questo fenomeno di cattiva positura.

**Osservazione 31.** Un Problema di Cauchy si dice *ben posto* (in  $\mathcal{C}^\infty$ ) secondo Hadamard, se per ogni scelta dei dati iniziali in  $\mathcal{C}^\infty$  esiste una ed una sola soluzione in  $\mathcal{C}^\infty$  e l'*applicazione risolvente*

$$\text{dati iniziali} \mapsto \text{soluzione}$$

è continua nelle topologie di  $\mathcal{C}^\infty$ . Ricordando il teorema del Grafico Chiuso (Teor. 28), e dato che  $\mathcal{C}^\infty$  è uno spazio di Fréchet, si prova che si ha automaticamente la buona positura in  $\mathcal{C}^\infty$  ogniqualvolta si riesce a risolvere il problema di Cauchy (con dati iniziali in  $\mathcal{C}^\infty$ ) su un intervallo di tempo indipendente dai dati. In altre parole, l'esistenza dell'applicazione risolvente in  $\mathcal{C}^\infty$  ne implica automaticamente la continuità.

Richiamiamo ora uno dei teoremi fondamentali della teoria generale delle EDP:

**Teorema 34. [Cauchy-Kovalevski]** Consideriamo il Probl. di Cauchy per un'equazione kovalevskiana:

$$\begin{cases} \partial_t^m u = \sum_{\substack{|\alpha|+j \leq m \\ j < m}} a_{\alpha,j}(x, t) \partial_x^\alpha \partial_t^j u \\ \partial_t^j u(x, 0) = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases}$$

Supponiamo che i coefficienti  $a_{\alpha,j}(x)$  e i dati iniziali  $\varphi_j(x)$  siano funzioni uniformemente analitiche su  $\mathbb{R}^n$ , cioè analitiche in ogni punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  con un raggio di convergenza indipendente da  $x_0$ . Esiste allora qualche  $T > 0$  per cui il problema ha una e una sola soluzione  $u(x, t)$  analitica sulla striscia  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

**Osservazione 32.** L'equazione del calore non è kovalevskiana, mentre quella di Laplace è un'equazione kovalevskiana ma il *tempo di vita* di ogni soluzione dipende, oltre che dai coefficienti, anche dai dati iniziali. Nel caso delle equazioni iperboliche, il tempo di vita è infinito, quindi è indipendente dai dati iniziali, e in molti casi possiamo risolvere il Probl. di Cauchy anche con dati iniziali non analitici.

## 13.2 Equazioni a coefficienti costanti

Vediamo ora di capire quali sono le equazioni a coefficienti costanti che presentano lo stesso fenomeno di cattiva positura dell'equazione di Laplace. Per semplicità consideriamo il caso delle equazioni omogenee in una variabile spaziale, cioè:

$$Lu \equiv \sum_{j=0}^m a_j \partial_x^j \partial_t^{m-j} u = 0, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad a_0 \equiv 1, \quad (13.3)$$

Cerchiamo di ricostruire l'esempio di Hadamard. Nel caso dell'eq. di Laplace eravamo partiti dall'esistenza di una soluzione  $u(x, t)$  limitata in  $x$  ed illimitata in  $t$ , precisamente:

$$u(x, t) = e^t e^{ix}.$$

Per avere un fenomeno analogo, basterebbe disporre di una soluzione del tipo

$$u(x, t) = e^{i\tau t} e^{i\xi x}, \quad \text{con } \xi \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (13.4)$$

In tal caso, infatti, avremmo ancora

$$L(e^{-\sqrt{k}} e^{ik\tau t} e^{ik\xi x}) = 0,$$

e quindi, supponendo ad esempio che  $\tau = \alpha + i\beta$  con  $\beta < 0$ , la successione di soluzioni

$$u_k(x, t) = e^{-\sqrt{k}} e^{ik\tau t} e^{ik\xi x} \equiv e^{-\sqrt{k}} e^{\beta kt} e^{ik(\alpha t + \xi x)}$$

presenterebbe lo stesso fenomeno di cattiva positura sopra descritto. Tutto sta a vedere quand'è che l'equazione (13.3) ammette una soluzione del tipo (13.4). A tal fine notiamo che  $L(e^{i\tau t} e^{i\xi x}) = 0$  se e solo se la coppia  $(\tau, \xi)$  verifica l'equazione caratteristica

$$\tau^m + a_1 \xi \tau^{m-1} + a_2 \xi^2 \tau^{m-2} + \dots + a_m \xi^m = 0,$$

quindi per avere la cattiva positura basterà trovare una coppia  $(\tau, \xi)$  con  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Lo stesso ragionamento vale in generale per le equazioni a coefficienti costanti in  $n$  variabili spaziali del tipo

$$\partial_t^m u + \sum_{j=1}^m p_j(\partial_x) \partial_t^{m-j} u = 0, \quad (13.5)$$

dove  $p_j(\partial_x)$  è un polinomio omogeneo di grado  $j$  in  $\partial_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$ . In questo caso consideriamo la successione di soluzioni

$$u_k(x, t) = e^{-\sqrt{k}} e^{ik\tau t} e^{ik\xi \cdot x}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{C},$$

mentre l'equazione caratteristica è

$$\tau^m + p_1(\xi)\tau^{m-1} + \dots + p_m(\xi) = 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n). \quad (13.6)$$

In conclusione otteniamo il seguente

**Teorema 35. [cond. necessaria di Hadamard]** *Se il Probl. di Cauchy per l'equazione a coefficienti costanti (13.5) è ben posto, allora:*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \text{l'equazione caratteristica (13.6) ha radici } \tau_1(\xi), \dots, \tau_m(\xi) \text{ reali.} \quad (13.7)$$

**Definizione 25. [equazioni iperboliche]** Un'equazione a coefficienti costanti del tipo (13.5) si dice *iperbolica* quando è verificata la Condizione Necessaria (13.7).

Nel caso dell'equazione di Laplace

$$u_{tt} + \Delta u = 0,$$

abbiamo la cattiva positura poiché l'equazione caratteristica ha radici non reali, infatti:

$$\tau^2 + |\xi|^2 = 0 \implies \tau = \mp i|\xi|,$$

mentre per l'equazione di d'Alembert

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

risulta

$$\tau^2 - |\xi|^2 = 0 \implies \tau = \mp |\xi| \in \mathbb{R}.$$

Ricorrendo al calcolo operativo e alla trasf. di Fourier si può dimostrare l'implicazione inversa (per la cui dim. si rinvia al caso più generale dei sistemi iperbolicici a coefficienti costanti, che sarà trattato più avanti):

**Teorema 36. [cond. sufficiente]** *Nel caso di equazioni a coefficienti costanti del tipo (13.5), la condizione (13.7) assicura la buona positura del relativo Problema di Cauchy.*

### 13.3 Sistemi a coefficienti costanti: necessità

La teoria di Hadamard si estende facilmente al caso dei sistemi del primo ordine (a coefficienti costanti):

$$u_t = A_1 u_{x_1} + \cdots + A_n u_{x_n} \quad (13.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (13.9)$$

dove  $u : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{C}^N$ , e i coefficienti  $A_1, \dots, A_n$  sono matrici  $N \times N$ . Questa volta cerchiamo delle soluzioni (non banali) del tipo:

$$u(x, t) = e^{i\tau t} e^{i\xi \cdot x} V_0, \quad \text{con } \xi \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, V_0 \in \mathbb{C}^N.$$

Poiché

$$u_t = i\tau u, \quad u_{x_j} = i\xi_j u,$$

troviamo

$$i\tau u = A_1 i\xi_1 u + \cdots + A_n i\xi_n u,$$

cioè  $(\tau I - A(\xi)) V_0 = 0$ , dove

$$A(\xi) = \xi_1 A_1 + \cdots + \xi_n A_n. \quad (13.10)$$

Affinché esista un vettore  $V_0 \neq 0$ , occorre dunque che  $(\xi, \tau)$  verifichi l'equazione caratteristica

$$\det(\tau I - A(\xi)) = 0.$$

In conclusione, per avere la cattiva positura, basta che, per qualche  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , l'equazione precedente abbia una soluzione  $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , in altri termini basta che la matrice  $A(\xi)$  abbia un autovalore non reale, di cui  $V_0$  sarà uno degli autovettori. Resta così dimostrato il seguente:

**Teorema 37. [cond. necessaria per i sistemi]**

Se il Problema di Cauchy  $\{(13.8)-(13.9)\}$  è ben posto, allora

$$\text{la matrice } A(\xi) \equiv \sum_{j=1}^n \xi_j A_j \text{ ha autovalori reali, } \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (13.11)$$

**Definizione 26. [sistemi iperbolici]** Un sistema a coefficienti costanti del tipo (13.8) si dice *iperbolico* quando è verificata la condizione (13.11).

### 13.4 Sistemi a coefficienti costanti: sufficienza

Proviamo ora che la condizione (13.11) è non solo necessaria ma anche *sufficiente* per la buona positura. Effettuando la trasformata di Fourier nella  $x$ ,  $u(x, t) \mapsto V(\xi, t)$ , il problema  $\{(13.8)-(13.9)\}$  si trasforma in

$$v' + iA(\xi)v = 0, \quad v(\xi, 0) = v_0(\xi), \quad (13.12)$$

dove  $A(\xi)$  è la matrice in (13.10). Si ha allora

$$v(\xi, t) = e^{itA(\xi)} v_0(\xi).$$

Per arrivare alla buona positura proveremo che, per qualche intero  $\nu$ , si ha <sup>1</sup>

$$u_0 \in H^k \implies v_0 \in \widehat{H}^k \implies v(\cdot, t) \in \widehat{H}^{k-\nu} \implies u(\cdot, t) \in H^{k-\nu}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e a tale scopo proveremo che

$$\|e^{itA(\xi)}\| \leq C(1 + |\xi|)^\nu, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (13.13)$$

<sup>1</sup> Ciò mostra la buona positura di (13.12) nello spazio  $\widehat{H}^\infty$ , e quindi del Probl. (13.8)-(13.9) in  $H^\infty = \cap H^k$  (si noti che  $H^\infty \subset C^\infty$  per i teor. d'immersione di Sobolev). Il numero  $\nu$  misura la *perdita di regolarità* nella risoluzione del problema.

Dato che  $\|A(\xi)\| \leq \alpha |\xi|$ , dove  $\alpha^2 = \sum_j \|A_j\|^2$ , la (13.13) consegue da un risultato di Analisi lineare:

**Teorema 38. [matrice esponenziale]** *Se  $A$  è una matrice  $N \times N$  con autovalori reali, allora*

$$\|e^{iA}\| \leq C_N (\|A\| + 1)^{N-1} \quad (13.14)$$

Questa stima segue da un semplice risultato di Calcolo operativo (*Integrale di Dunford*):

$$e^{iA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{i\zeta} (\zeta I - A)^{-1} d\zeta \quad (13.15)$$

dove  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  è un'arbitraria curva chiusa che circonda gli autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  della matrice  $A$ .

**Dim. della (13.15)** Dato che  $\exp(iA) = \sum_{k=0}^{\infty} (iA)^k/k!$ , basta provare che

$$A^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^k (\zeta I - A)^{-1} d\zeta. \quad (13.16)$$

Ora si vede facilmente la funzione matriciale  $\zeta \mapsto (\zeta I - A)^{-1}$  è olomorfa sul piano complesso privato degli autovalori  $\{\lambda_j\}$ , inoltre per  $\|\zeta^{-1}A\| < 1$ , cioè per  $|\zeta| > \|A\|$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} (\zeta I - A)^{-1} &= \zeta^{-1} (I - \zeta^{-1}A)^{-1} = \zeta^{-1} \sum_{h=0}^{\infty} \zeta^{-h} A^h, \\ \zeta^k (\zeta I - A)^{-1} &= \sum_{h=0}^{k-1} \zeta^{(k-1)-h} A^h + \zeta^{-1} A^k + \sum_{h=k+1}^{\infty} \zeta^{(k-1)-h} A^h. \end{aligned}$$

Da questa identità si ricava la (13.16) osservando che, per  $n \in \mathbb{Z}$ , risulta:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^n d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq -1 \\ 1 & \text{per } n = -1 \end{cases}. \quad \square$$

**Dim. del Teor. 38** Scegliendo  $\Gamma = \partial D$ , con

$$D = B_1(\lambda_1) \cup \dots \cup B_1(\lambda_N), \quad B_1(\lambda_j) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \lambda_j| < 1\},$$

e ricordando che gli autovalori  $\lambda_j$  sono reali, troviamo:

$$\text{lunghezza}(\Gamma) \leq 2\pi N, \quad |e^{i\zeta}| \leq e^{|\Im \zeta|} \leq e, \quad \forall \zeta \in \Gamma. \quad (13.17)$$

Stimiamo ora la norma di  $(\zeta I - A)^{-1}$ . Se  $B$  è una matrice invertibile,  $B^{\text{co}}$  la *matrice dei cofattori*<sup>2</sup>, risulta

$$\|(B^{\text{co}})^*\| \leq C_N \|B\|^{N-1}, \quad \|B^{-1}\| = \|(B^{\text{co}})^*/\det B\| \leq C_N \|B\|^{N-1} |\det B|^{-1}. \quad (13.18)$$

Nel nostro caso si ha  $\|\zeta I - A\| \leq 2\|A\| + 1$  per  $\zeta \in \Gamma$ , in quanto  $|\zeta| \leq \max |\lambda_j| + 1 \leq \|A\| + 1$ , mentre

$$\det(\zeta I - A) = (\zeta - \lambda_1) \cdots (\zeta - \lambda_N) \geq 1,$$

e quindi

$$\|(\zeta I - A)^{-1}\| \leq C_N (2\|A\| + 1)^{N-1}. \quad (13.19)$$

Introducendo nella formula (13.15) le stime (13.17) e (13.19), otteniamo la (13.14).  $\square$

**Osservazione 33.** Se  $A$  è hermitiana, la  $\exp(iA)$  è *unitaria* quindi ha norma 1 e la (13.14) è ovvia.

<sup>2</sup>  $B^{\text{co}}$  ha come elemento  $(i, j)$  il minore di ordine  $(N-1)$  che si ottiene da  $B$  cancellando la  $i$ -ma riga e la  $j$ -ma colonna, col segno  $(-1)^{i+j}$ , dunque  $B(B^{\text{co}})^* = \det B \cdot I$ . Dato che ogni elemento di  $B$  si stima con  $\|B\|$ , ogni elemento di  $(B^{\text{co}})^*$ , e quindi anche  $\|(B^{\text{co}})^*\|$ , si stima con  $C(N) \|B\|^{N-1}$ .

## 13.5 Sistemi iperbolici a coefficienti variabili

Passando al caso dei coefficienti variabili consideriamo il Problema di Cauchy

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} u_t = A_1(x, t)u_{x_1} + \cdots + A_n(x, t)u_{x_n} + B(x, t)u \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

sulla striscia

$$S = \mathbb{R}^n \times [0, T],$$

dove  $A_j(x, t)$ ,  $B(x, t)$  sono matrici  $N \times N$  dipendenti con regolarità dalle variabili  $(x, t)$ . Un tale sistema si dice *iperbolico* se, per ogni  $(x, t)$ , è verificata la condizione di Hadamard, cioè la *matrice caratteristica*

$$A(x, t, \xi) \equiv \sum_{j=1}^n \xi_j A_j(x, t), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall (x, t) \in S, \quad (13.20)$$

ha autovalori reali. Per tali sistemi la buona positura può essere falsa se non ci limita ad alcune classi particolari, come quelle dei *sistemi simmetrici* e dei *sistemi strettamente iperbolici*.

## 13.6 Sistemi simmetrici

I *sistemi simmetrici* secondo Friedrichs, sono quelli del tipo  $(\mathcal{P})$  in cui

$$A_1(x, t), \dots, A_n(x, t) \quad \text{sono matrici hermitiane.} \quad (13.21)$$

Ciò equivale a dire che, per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , la matrice caratteristica  $A(x, t, \xi)$  è hermitiana.

**Teorema 39. [Friedrichs]** *Supponiamo che i coefficienti  $A_j(x, t)$  siano matrici hermitiane di classe  $C^1$ , limitate sulla striscia  $S$ , mentre  $B(x, t)$  è continua su  $S$ . Allora il Problema  $(\mathcal{P})$  è ben posto, cioè:*

$$\forall u_0(x) \in H^k(\mathbb{R}^n) \quad \text{vi è una ed una sola soluzione } u \in C^1([0, T], H^k(\mathbb{R}^n)).$$

*Si ha inoltre la velocità finita di propagazione: se  $u_0(x) \equiv 0$  su una qualche palla  $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ , allora  $u(x, t) \equiv 0$  sul cono (di propagazione)  $\Gamma_{B_0} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  di base  $B_0$  e pendenza  $1/\Lambda$ , dove*

$$\Lambda = \sup_S \left\{ \sum_{j=1}^n \|A_j(x, t)\|^2 \right\}^{1/2}. \quad (13.22)$$

**Dim.** La buona positura segue da una stima a priori unita ad un procedimento di approssimazione.

*i) Stima dell'energia.*

Sia  $u(x, t) \in C^1([0, T], H^1)$  una soluzione regolare del sistema. Fissati  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $\rho_0 > 0$ , definiamo l'*energia*

$$E(t) \equiv E(t, u) = \frac{1}{2} \int_{B_t} |u(x, t)|^2 dx, \quad (13.23)$$

dove

$$B_t = B_{\rho(t)}(x_0), \quad \rho(t) = \rho_0 - \Lambda t. \quad (13.24)$$

Ponendo  $S_t = \partial B_t$ , e procedendo come nella sezione 9.2, otteniamo allora :

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{B_t} \Re(u_t, u) dx + \frac{\rho'(t)}{2} \int_{S_t} |u|^2 dS \\ &= \int_{B_t} \left\{ \sum_{j=1}^n \Re(A_j \partial_j u, u) + \Re(Bu, u) \right\} dx - \frac{\Lambda}{2} \int_{S_t} |u|^2 dS. \end{aligned}$$

Grazie all'hermitianità della matrice  $A_j$ , vale l'eguaglianza

$$\partial_j(A_j u, u) = ((\partial_j A_j) u, u) + 2 \Re(A_j \partial_j u, u),$$

quindi, per la formula di Gauss-Green, troviamo (indicando con  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  la normale esterna a  $S_t$ ) :

$$E'(t) = \int_{B_t} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n ((\partial_j A_j) u, u) + \Re(Bu, u) \right\} dx + \frac{1}{2} \int_{S_t} \left( -\Lambda |u|^2 + \sum_{j=1}^n (A_j u, u) \nu_j \right) dS.$$

Dalla (13.22) segue che la funzione integranda nel secondo integrale è  $\leq 0$ , dunque, supponendo che  $\|\partial A_j(x, t)\| + \|B(x, t)\| \leq C$  sul cono di propagazione  $\Gamma_{B_0}$ , otteniamo

$$E'(t) \leq C E(t),$$

da cui la stima dell'energia :

$$E(t) \leq E(0) e^{Ct}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Abbiamo in tal modo maggiorato la norma  $L^2(B_t)$  di una soluzione regolare con la norma  $L^2(B_0)$  del dato iniziale. Se poi i coefficienti  $A_j(x, t)$  sono funzioni  $C^1$  in  $x$ , deriviamo ogni termine del nostro rispetto alle variabili spaziali  $x_j$ , otteniamo un sistema di  $n+1$  equazioni nell'incognita  $V = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u, u)^* \in \mathbb{C}^{n+1}$ ,

$$V_t = \mathcal{A}_1(x, t) V_{x_1} + \dots + \mathcal{A}_n(x, t) V_{x_n} + \mathcal{B}(x, t) V,$$

dove i coefficienti sono matrici simmetriche di ordine  $N(n+1)$  formate da blocchi  $N \times N$  tutti nulli tranne quelli posti sulla diagonale, cioè

$$\mathcal{A}_j(x, t) = A_j(x, t) \otimes \dots \otimes A_j(x, t) \otimes 0.$$

Applicando a tale sistema la stima  $L^2$  già provata, troviamo una stima  $H^1$  della soluzione. Se poi i coefficienti del sistema  $(\mathcal{P})$  sono funzioni matriciali di classe  $C^\infty$  su  $S$ , possiamo iterare il procedimento pervenendo a una stima in  $H^k$  della soluzione  $u(\cdot, t)$ , e quindi, dato che  $u_t = \sum_j A_j \partial_j u$ ,

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^k(B_t)} + \|u_t(\cdot, t)\|_{H^{k-1}(B_t)} \leq C_k(T) \|u_0\|_{H^k(B_0)}, \quad \forall k \geq 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

ii) *Approssimazione.*

Per mostrare l'esistenza di una soluzione del Problema  $(\mathcal{P})$  approssimiamo  $(\mathcal{P})$  con una successione  $(\mathcal{P}_j)$  di Problemi che sappiamo risolvere, e ai quali si possa applicare la stima a priori dell'energia. Troveremo in tal modo una succ.  $\{u_j(x, t)\}$  di soluzioni approssimanti che converge verso una funzione  $u(x, t)$  che risulta essere una soluzione di  $(\mathcal{P})$ . L'unicità è una diretta conseguenza della stima dell'energia.

Fra i vari modi di approssimare  $(\mathcal{P})$ , il più comune è il metodo di *Riesz-Galerkin* (per la quale rimandiamo al trattato di Evans). Esporremo qui schematicamente un altro metodo di approssimazione, dovuto a Schauder :

Per ogni coppia di parametri  $\varepsilon, \delta > 0$  consideriamo il Problema

$$(\mathcal{P}_{\varepsilon, \delta}) \quad \begin{cases} u_t = A_{1, \varepsilon}(x, t) u_{x_1} + \dots + A_{n, \varepsilon}(x, t) u_{x_n} + B_\varepsilon(x, t) u, \\ u(x, 0) = u_\delta(x), \end{cases}$$

con

$$A_{j, \varepsilon} = A_j * \rho_\varepsilon, \quad u_{0, \delta} = u_0 * \rho_\delta,$$

dove  $\{\rho_\varepsilon(x)\}$  è una famiglia di mollificatori di Gauss e le convoluzioni sono fatte rispetto ad  $x^3$

<sup>3</sup> E' essenziale usare due diverse scale di parametri, una per i coefficienti e l'altra per i dati iniziali.

I coefficienti e i dati iniziali presenti nel Probl.  $(\mathcal{P}_{\varepsilon,\delta})$  sono *funzioni uniformemente analitiche* in  $x^4$ , quindi il Teor. di Cauchy-Kovalewski assicura l'esistenza di una soluzione  $u_{\varepsilon,\delta}(x,t)$  di tale Probl. su una striscia di  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  del tipo  $\{0 \leq t \leq T_\varepsilon\}$ . D'altra parte le matrici  $A_{j,\varepsilon}(x,t) \equiv A_j(x,t) * \rho_\varepsilon(x)$  sono hermitiane (perché tali sono le  $A_j(x,t)$ ) e verificano la (13.22) con la stessa costante  $\Lambda$ . Allora, per quanto provato nella parte (i), per ogni  $k$  vale la stima:

$$\|u_{\varepsilon,\delta}\|_k \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ \|u_{\varepsilon,\delta}(\cdot, t)\|_{H^k(B_t)} + \|\partial_t u_{\varepsilon,\delta}(\cdot, t)\|_{H^{k-1}(B_t)} \right\} \leq C_k(T) \|u_\delta\|_{H^k(B_0)}.$$

Dato che, per ogni  $\delta, \delta'$ , la funzione  $u_{\varepsilon,\delta} - u_{\varepsilon,\delta'}$  è una soluz. del sistema presente in  $(\mathcal{P}_{\varepsilon,\delta})$ , abbiamo anche

$$\|u_{\varepsilon,\delta} - u_{\varepsilon,\delta'}\|_k \leq C_k(T) \|u_\delta - u_{\delta'}\|_{H^k(B_0)}. \quad (13.25)$$

Passando al limite per  $\delta \rightarrow 0$ , vediamo che  $\{u_\delta\} \rightarrow u_0$  in  $H^k(B_0)$  e allora, per la (13.25),

$$\{(u_{\varepsilon,\delta}(\cdot, t), \partial_t u_{\varepsilon,\delta}(\cdot, t))\} \rightarrow (u_\varepsilon, \partial_t u_\varepsilon) \quad \text{in } H^k(B_t) \times H^{k-1}(B_t), \quad \forall t \in [0, T],$$

per qualche funzione  $u_\varepsilon(x,t)$  che risulta essere una soluzione del Problema  $(\mathcal{P}_{\varepsilon,0})$  sulla striscia  $\{0 \leq t \leq T_\varepsilon\}$ . Ora ripartiamo dall'istante  $t = T_\varepsilon$  per prolungare la soluzione  $u_\varepsilon(x,t)$  sulla striscia  $\{T_\varepsilon \leq t \leq 2T_\varepsilon\}$ . Iterando questo procedimento, possiamo raggiungere la striscia di partenza  $\{0 \leq t \leq T\}$ . A questo punto mandiamo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , e troviamo una soluzione  $u(x,t)$  del Problema  $(\mathcal{P})$  su  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ .  $\square$

## 13.7 Sistemi strettamente iperbolici

un sistema  $N \times N$  del tipo

$$u_t = A_1(x,t) u_{x_1} + \dots + A_n(x,t) u_{x_n} + B(x,t) u \quad (13.26)$$

si dice *strettamente iperbolico* se, per ogni  $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$  ed ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , la matrice caratteristica  $A(x,t,\xi)$  (vedi (13.20)) ha autovalori  $\lambda_1(x,t,\xi), \dots, \lambda_N(x,t,\xi)$  *reali e distinti*, e più precisamente

$$|\lambda_i(x,t,\xi) - \lambda_j(x,t,\xi)| \geq \lambda_0 > 0, \quad \forall i \neq j. \quad (13.27)$$

Per questa classe di sistemi vale l'importante

**Teorema 40. [Petrowski]** *Il Probl. di Cauchy per un sistema strettamente iperbolico è ben posto in  $C^\infty$ .*

La dimostrazione di questo teorema è elaborata, e si divide come al solito in due parti: una stima a priori dell'energia e un'approssimazione del dato problema con problemi (più facili) della stessa natura. Ci limiteremo qui ad esporre in modo assai schematico la prima parte.

L'idea portante è di *diagonalizzare* il sistema, più esattamente costruire un *simmetrizzatore* che consenta di definire un funzionale dell'*energia*. Cominceremo col costruire un simmetrizzatore per una matrice iperbolica costante. Tratteremo poi due tipi speciali di sistemi: quelli a coefficienti che dipendono solo dalla variabile temporale e quelli in una sola variabile spaziale. Infine passeremo al caso generale.

---

<sup>4</sup> cioè sono analitiche in  $x$  su tutto  $\mathbb{R}^n$  con un raggio di analiticità che non diventa infinitesimo quando  $|x| \rightarrow \infty$ .

### 13.7.1 Simmetrizzatore di una matrice

**Definizione 27.** [matrice iperbolica]

Una matrice  $N \times N$  (a elementi reali o complessi) si dice *iperbolica* se i suoi autovalori sono *reali*. Se tali autovalori sono anche *semplici* diremo che  $A$  è una *matrice strettamente iperbolica*.

**Definizione 28.** [simmetrizzatore]

Se  $A$  è una matrice  $N \times N$ , si chiama *simmetrizzatore* di  $A$  ogni matrice  $N \times N$  tale che

$$Q^* = Q, \quad (QA)^* = QA. \quad (13.28)$$

Se  $Q$  è un simmetrizzatore invertibile e  $P$  l'inversa della radice quadrata di  $Q$ <sup>5</sup>, la matrice  $P^{-1}AP$  è hermitiana. viceversa, se  $P^{-1}AP$  è hermitiana allora  $Q \equiv P^*P$  è un simmetrizzatore di  $A$ .

E' facile vedere che ogni matrice strettamente iperbolica  $A$  ha un simmetrizzatore, infatti essa è *diagonalizzabile*, cioè esiste una matrice invertibile  $P$  per la quale  $P^{-1}AP$  risulta diagonale: se  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  sono gli autovalori (reali e distinti) di  $A$ , basta scegliere per ogni  $\lambda_j$  un autovettore  $v_j$ <sup>6</sup> e prendere

$$P = \text{col} \{v_1, \dots, v_N\}$$

per avere

$$P^{-1}AP = \text{diag} \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}.$$

Dunque  $P^{-1}AP$  è una matrice *diagonale reale*, quindi hermitiana, e  $Q \equiv (P^{-1})^*P^{-1}$  è un simmetrizzatore.

Nel caso in cui  $A$  dipende da qualche parametro, conviene costruire un simmetrizzatore mediante un procedimento più complesso che però esplicita la dipendenza da  $A$ :

**Proposizione 15.** *Data  $A$  una matrice strettamente iperbolica, con autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ , fissiamo due costanti positive  $\lambda_0, \Lambda_0$  per cui*

$$|\lambda_j| \leq \Lambda_0, \quad |\lambda_i - \lambda_j| \geq \lambda_0 \quad \forall i \neq j. \quad (13.29)$$

*Esiste allora un simmetrizzatore  $Q$  di  $A$  che (oltre alle (13.28)) verifica, per ogni vettore  $v \in \mathbb{C}^N$ ,*

$$\langle QAv, v \rangle \leq \Lambda_0 \langle Qv, v \rangle, \quad (13.30)$$

$$|v|^2 \leq \langle Qv, v \rangle \leq C(N) \lambda_0^{-2(N-1)} |v|^2. \quad (13.31)$$

*Inoltre  $Q \equiv Q(A)$  è una funzione  $C^\infty$  degli elementi di  $A$ , omogenea di grado zero in  $A$  nel senso che:*

$$Q(\lambda A) = Q(A), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Dim.** Per ogni  $j = 1, \dots, N$ , consideriamo il *proiettore spettrale* relativo all'autovalore  $\lambda_j$ , cioè la matrice

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} (zI - A)^{-1} dz, \quad (13.32)$$

dove  $\Gamma_j$  è la circonferenza del piano complesso di centro  $\lambda_j$  e raggio  $\lambda_0/2$ .<sup>7</sup> Con tecniche di Calcolo operativo si verifica che i proiettori  $P_j$  sono funzioni  $C^\infty$  degli elementi di  $A$  e verificano le identità:

$$P_j^2 = P_j, \quad P_i P_j = 0 \quad \text{per } i \neq j, \quad P_1 + \dots + P_N = I, \quad AP_j = P_j A = \lambda_j P_j. \quad (13.33)$$

<sup>5</sup> ogni matrice hermitiana invertibile  $Q$  ammette una radice quadrata  $R$  ( $R^2 = Q$ ) che è a sua volta hermitiana e invertibile. Se  $QA$  è hermitiana, e  $P = R^{-1}$ , anche la matrice  $P^{-1}AP \equiv PQAP \equiv P(QA)P^*$  risulta hermitiana.

<sup>6</sup> dato che tutti gli autovalori  $\lambda_j$  sono semplici, i corrispondenti autospazi hanno dimensione 1.

<sup>7</sup> per ogni vettore  $v$ , la funzione vettoriale  $z \mapsto (zI - A)^{-1}v$  è olomorfa su  $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ , dunque possiamo prendere come  $\Gamma_j$  un'arbitraria curva chiusa che racchiuda  $\lambda_j$  escludendo gli altri autovalori.

Da queste identità si ricava che la matrice hermitiana

$$Q = \sum_{j=1}^N P_j^* P_j \quad (13.34)$$

è un simmetrizzatore di  $A$ , infatti:

$$QA = \sum_{j=1}^N \lambda_j P_j^* P_j = (QA)^*.$$

Notiamo anche che i proiettori  $P_j$  (e di conseguenza anche  $Q$ ) restano inalterati se si moltiplica  $A$  per uno scalare  $\lambda$ : per vederlo basta eseguire nell'integrale (13.32) il cambiamento di variabili  $\zeta = \lambda z$ . Si ha poi

$$\langle QAv, v \rangle = \sum_{j=1}^N \lambda_j |P_j v|^2 \leq \Lambda_0 |P_j v|^2 = \Lambda_0 \langle Qv, v \rangle.$$

Stimiamo ora dal basso e dall'alto la forma quadratica  $\langle Qv, v \rangle$ . Da un lato abbiamo

$$|v|^2 = \left| \sum_j P_j v \right|^2 \leq \left\{ \sum_j |P_j v| \right\}^2 \leq N \sum_j |P_j v|^2 = N \langle Qv, v \rangle;$$

d'altro lato, ricordando la (13.18) e la (13.29), troviamo, per qualche costante  $C_1$  dipendente da  $N$ ,

$$\begin{aligned} \|(zI - A)^{-1}\| &\leq \|zI - A\|^{N-1} [\det(zI - A)]^{-1} = \|zI - A\|^{N-1} (z - \lambda_1)^{-1} \cdots (z - \lambda_N)^{-1} \\ &\leq C_1 (1 + \|A\|)^{N-1} (\lambda_0/2)^{-N}, \quad \forall z \in \Gamma_j, \end{aligned}$$

mentre dalla definizione (13.32) di  $P_j$  si ricava:

$$\|P_j\| \leq \frac{\lambda_0}{2} \|(zI - A)^{-1}\|. \quad (13.35)$$

Dato che  $P_j(\lambda A) = P_j(A)$  possiamo supporre  $\|A\| = 1$  e quindi, per qualche altra costante  $C_2$ , troviamo

$$\|P_j\| \leq C_2 \lambda_0^{-(N-1)}.$$

In conclusione abbiamo provato che il simmetrizzatore (13.34) verifica una stima del tipo

$$\frac{1}{N} |v|^2 \leq \langle Qv, v \rangle \equiv \sum_j |P_j v|^2 \leq C_3 \lambda_0^{-2(N-1)} |v|^2,$$

quindi per arrivare alla (13.31) basta sostituire  $Q$  con  $NQ$ .

### 13.7.2 Stima dell'energia per coefficienti indipendenti da $x$ .

Consideriamo un sistema strettamente iperbolico del tipo

$$U_t = A_1(t) U_{x_1} + \cdots + A_n(t) U_{x_n} + B(t) U, \quad (13.36)$$

sulla striscia  $S_T = \mathbb{R}^n \times [0, T]$ , dove le  $A_j(t)$  sono funzioni matriciali  $C^k$  su  $[0, T]$  per qualche  $k \geq 1$ , e  $B(t)$  è una funzione continua. Effettuando la trasformata di Fourier rispetto a  $x$ ,  $U(x, t) \mapsto v(t, \xi)$ , otteniamo il sistema *differenziale ordinario*

$$v' = (i A(t, \xi) + B(t)) v, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

dove

$$A(t, \xi) = \sum_{j=1}^N \xi_j A_j(t).$$

Supponiamo che, per ogni  $\xi \neq 0$ , la matrice  $A(t, \xi)$  abbia autovalori reali e distinti:

$$\lambda_1(t, \xi) < \lambda_2(t, \xi) < \dots < \lambda_N(t, \xi).$$

Ciascuno dei  $\lambda_j(t, \xi)$  è una funzione continua di  $(t, \xi)$ <sup>8</sup> omogenea di grado 1 in  $\xi$ , poiché tale è la funzione matriciale  $A(t, \xi)$ . Di conseguenza, per ogni  $i \neq j$ , la funzione (continua e positiva)  $|\lambda_i - \lambda_j|$  ha un minimo positivo sul compatto  $[0, T] \times \{|\xi| = 1\}$  e si ha:

$$|\lambda_i(t, \xi) - \lambda_j(t, \xi)| \geq \lambda_0 > 0, \quad \forall t \in [0, T], \xi \neq 0.$$

La presenza nei coefficienti della variabile  $t$  non consente di scrivere esplicitamente la soluzione  $v(t, \xi)$  usando la matrice esponenziale (come nel § 13.4), possiamo però stimare  $v$  mediante una stima dell'energia:

Se  $Q(t, \xi) \equiv Q(A(t, \xi))$  è il simmetrizzatore di  $A(t, \xi)$  costruito nella Prop. 15 definiamo l'energia di una soluzione  $v$  ponendo

$$e(t, \xi) = \langle Q(t, \xi) v(t, \xi), v(t, \xi) \rangle, \quad E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e(t, \xi) d\xi.$$

Tenuto conto dell'hermitianità di  $Q$  e  $QA$  abbiamo allora, per  $0 \leq t \leq T$ ,

$$\begin{aligned} e'(t, \xi) &= \langle Q_t v, v \rangle + \langle Q v_t, v \rangle + \langle Q v, v_t \rangle = \langle Q_t v, v \rangle + 2 \Re \langle Q v_t, v \rangle \\ &= \langle Q_t v, v \rangle + 2 \Re [i \langle Q A v, v \rangle + \langle Q B v, v \rangle] = \langle Q_t v, v \rangle + 2 \Re \langle Q B v, v \rangle \leq C |v|^2 \\ &\leq C e(t, \xi), \end{aligned}$$

per qualche costante  $C$  dipendente dalle norme  $C^1([0, T])$  delle matrici  $A_j(t)$  e dalla norma  $C^0([0, T])$  di  $B(t)$ .<sup>9</sup> Dunque

$$e(t, \xi) \leq e^{Ct} e(0, \xi),$$

e quindi, ricordando la (13.31),

$$|\xi^\alpha v(t, \xi)|^2 \leq C_1 e^{Ct} |\xi^\alpha v(0, \xi)|^2, \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

Integrando in  $\xi$  su  $\mathbb{R}^n$ , e ricordando l'identità di Plancherel, otteniamo la stima a priori

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^k} \leq C_1 e^{Ct/2} \|u(\cdot, 0)\|_{H^k}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

### 13.7.3 Stima dell'energia in una variabile spaziale.

Consideriamo, sulla striscia  $S_T = \mathbb{R} \times [0, T]$ , un sistema strettamente iperbolico del tipo

$$u_t = A(x, t) u_x + B(x, t) u, \tag{13.37}$$

dove  $A(x, t)$  è una matrice di classe  $C^1$  limitata su  $S_T$  insieme alle sue derivate prime, con autovalori  $\lambda_j(x, t)$  reali verificanti la (13.29) uniformemente su  $S_T$ . Se  $Q(x, t) \equiv Q(A(x, t))$  è il simmetrizzatore della matrice  $A(x, t)$  costruito nella Prop. 15, definiamo l'energia di una soluzione  $u$  ponendo

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}} \langle Q(x, t) u, u \rangle dx.$$

<sup>8</sup> con tecniche di Analisi complessa si prova che, se  $\lambda$  è un autovalore *semplice* di una matrice  $A$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni perturbazione  $P$  con  $\|P\| \leq \varepsilon$ , la matrice  $A + P$  ha uno ed un solo autovalore (semplice)  $\mu$  con  $|\lambda - \mu| \leq \varepsilon$ .

<sup>9</sup> dalla formula (13.32) con  $A = A(t)$  si ricava che i proiettori  $P_j \equiv P_j(t)$ , e quindi anche il simmetrizzatore  $Q \equiv Q(t)$ , sono derivabili rispetto a  $t$ , e  $\|Q'(t)\| \leq C(\|A(t)\| + \|A'(t)\|)$ .

Derivando in  $t$  e ricordando che  $Q = Q^*$ , troviamo:

$$E'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \langle Q_t u, u \rangle + 2 \Re \langle Q u_t, u \rangle \right\} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \langle Q_t u, u \rangle + 2 \Re [\langle Q A u_x, u \rangle + \langle Q B u, u \rangle] \right\} dx.$$

Dato che anche  $QA$  è una matrice hermitiana, abbiamo

$$2 \Re \langle Q A u_x, u \rangle = \partial_x \langle Q A u, u \rangle - \langle (Q A)_x u, u \rangle,$$

mentre, essendo  $A(x, t) \in C^1(S_T)$ ,  $B(x, t) \in C^0(S_T)$ , e quindi anche  $Q(x, t) \in C^1(S_T)$ ,

$$|\langle [Q_t - (Q A)_x] u, u \rangle| + |2 \Re \langle Q B u, u \rangle| \leq C |u|^2.$$

Integrando in  $x \in \mathbb{R}^n$ , otteniamo allora la stima dell'energia:

$$E'(t) \leq C E(t).$$

dalla quale segue una stima a priori del tipo

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Per ottenere una stima in norma  $H^k$ , basta derivare  $k$  volte rispetto ad  $x$  il sistema di partenza e applicare la stima  $L^2$  alla funzione  $\partial_x^k u$ .

**Osservazione 34. (velocità finita di propagazione)** La precedente stima dell'energia può essere raffinata, fissando un intervallo reale  $[x_0 - r_0, x_0 + r_0]$  e studiando l'evoluzione dell'*energia locale*

$$E(t) = \int_{x_0 - r(t)}^{x_0 + r(t)} \langle Q u, u \rangle dx \quad \text{dove} \quad r(t) = r_0 - t \Lambda_0, \quad 0 \leq t \leq r_0 / \Lambda_0.$$

Infatti, procedendo come nella dim. del Teorema di Friedrichs (Teor. 39) e ricordando la (13.30), troviamo

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{x_0 - r(t)}^{x_0 + r(t)} \left\{ \langle Q_t u, u \rangle + 2 \Re [\langle Q A u_x, u \rangle + \langle Q B u, u \rangle] \right\} dx - \left[ \Lambda_0 \langle Q u, u \rangle \right]_{x=x_0 - r(t)}^{x=x_0 + r(t)} \\ &= \int_{x_0 - r(t)}^{x_0 + r(t)} \left\{ \langle [Q_t - (Q A)_x] u, u \rangle + 2 \Re \langle Q B u, u \rangle \right\} dx + \left[ \langle Q A u, u \rangle - \Lambda_0 \langle Q u, u \rangle \right]_{x=x_0 - r(t)}^{x=x_0 + r(t)} \\ &\leq \int_{x_0 - r(t)}^{x_0 + r(t)} C |u|^2 dx \leq C E(t). \end{aligned}$$

### 13.7.4 Richiami sugli operatori pseudo-differenziali

Consideriamo ora un arbitrario sistema strettamente iperbolico di tipo (13.26). Per arrivare a una stima a priori delle soluzioni useremo lo stesso metodo di prima: definire un'energia tramite il simmetrizzatore  $Q(x, t, \xi)$  della matrice-simbolo

$$A(x, t, \xi) = \sum_{j=0}^n \xi_j A_j(x, t). \quad (13.38)$$

Questa volta però la presenza della variabile  $x$  vieta l'uso della trasformata di Fourier, mentre il fatto di essere in  $n$  variabili spaziali con  $n \geq 2$  rende complicata la dipendenza di  $Q$  da  $\xi$ .<sup>10</sup>

<sup>10</sup> nel caso  $n = 1$  si ha semplicemente  $Q = \xi Q(x, t)$ , e quindi si può di fatto ignorare la presenza della  $\xi$  prendendo  $\xi = 1$ .

Per definire l'energia ricorriamo alla teoria degli *operatori pseudo-differenziali* (OPD). Infatti per ogni  $t \in [0, T]$ ,  $Q(x, t, \xi)$  è una funzione matriciale di classe  $C^\infty$  su  $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{\xi = 0\}$ , omogenea di grado zero in  $\xi$ , e quindi definisce un *simbolo pseudo-differenziale* di ordine zero. Questo ci consente di definire un OPD

$$\mathcal{Q}(t) = Q(x, t, D),$$

di ordine zero, e quindi (scegliendo una costante sufficientemente grande  $C > 0$ ) l'energia positiva

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{Q}(t) u, u) dx + C \|u(\cdot, t)\|_{H^{-1}}^2.$$

Per illustrare questo procedimento, diamo una presentazione schematica della teoria degli OPD, rimandando per maggiori dettagli a M.E. Taylor, *Pseudodifferential Operators and Nonlinear PDE*, Birkhäuser 1991. Il punto di partenza è la *formula d'inversione* per la trasformata di Fourier

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \hat{u}(\xi) d\xi, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Applicando ad entrambi i membri di questa eguaglianza l'*operatore differenziale*

$$\mathcal{P} \equiv \sum_{|\gamma| \leq m} a_\gamma(x) D^\gamma \quad \text{dove} \quad D = \frac{1}{i} (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}),$$

che ha per *simbolo* la funzione

$$p(x, \xi) = \sum_{|\gamma| \leq m} a_\gamma(x) \xi^\gamma, \quad (13.39)$$

troviamo

$$\mathcal{P} u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} p(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (13.40)$$

In questo caso il simbolo è una funzione  $C^\infty$  su  $\mathbb{R}^{2n}$  di un tipo molto speciale, infatti è un polinomio in  $\xi$  di ordine  $m \in \mathbb{N}$ . Se supponiamo che i coefficienti  $a_\gamma(x)$  siano funzioni limitate su  $\mathbb{R}^n$  con tutte le loro derivate  $\partial_x^\alpha a_\gamma$ , il simbolo (13.39) verifica, uniformemente su  $\mathbb{R}^{2n}$ , una stima del tipo

$$|\partial_x^\alpha p(x, \xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^m, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad (13.41)$$

e, poichè le derivate in  $\xi$  di ordine  $k$  sono a loro volta dei polinomi in  $\xi$  di ordine  $m - k$ , si ha anche:

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n. \quad (13.42)$$

E' facile vedere che ogni operatore differenziale  $\mathcal{P}$  opera con continuità sullo spazio  $\mathcal{S}$ , ed anche:

$$\mathcal{P} : H^s \mapsto H^{s-m}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (13.43)$$

dove gli  $H^s \equiv H^s(\mathbb{R}^n)$  sono gli *spazi di Sobolev frazionari*, così definiti:<sup>11</sup>

$$H^s = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|)^s \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

Ora l'espressione (13.40) ha senso anche se  $p(x, \xi)$ , pur non essendo un polinomio in  $\xi$ , ha una *crescita polinomiale* di ordine  $m$  nella variabile  $\xi$  insieme a tutte le sue derivate in  $x$ , mentre le sue derivate in  $\xi$  di ordine  $k$  hanno una crescita polinomiale in  $\xi$  di ordine  $m - k$ , cioè per ogni  $p(x, \xi)$  verificante la (13.42).

Possiamo andare ancora oltre, assumendo che  $m$  sia un *intero relativo*, anzi, un qualunque *numero reale*.

<sup>11</sup> per  $s$  intero questi spazi coincidono con gli spazi di Sobolev precedentemente definiti.

**Definizione 29. [simboli]**

Ogni funzione  $p(x, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  che verifichi la (13.42) con  $m \in \mathbb{R}$ , viene detta *simbolo di ordine  $m$* . La classe dei simboli di ordine  $m$  viene indicata con  $S^m$ .

**Definizione 30. [OPD]**

Si chiama *operatore pseudo-differenziale* di ordine  $m$  ogni operatore  $\mathcal{P}$  del tipo (13.40) con  $p(x, \xi) \in S^m$ . La classe di tali operatori viene indicata con  $OPS^m$ . Useremo la notazione:

$$\mathcal{P} = p(x, D) \equiv Op(p)$$

Per trattare il caso dei sistemi, considereremo simboli ed operatori  $N \times N$ -*matriciali*, cioè del tipo

$$\begin{aligned} P(x, \xi) &\equiv [p_{ij}(x, \xi)]_{i,j=1,\dots,N}, & p_{ij} &\in S^m, \\ \mathcal{P}u(x) &\equiv P(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} P(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi, & u &\in \mathcal{S}^N. \end{aligned} \quad (13.44)$$

Le classi dei simboli e degli OPD matriciali saranno ancora indicate con  $S^m$  e  $OPS^m$ .

Con molta più fatica del caso differenziale, si può estendere la (13.43) al caso pseudo-differenziale:

**Proposizione 16.** *Ogni OPD (matriciale)  $\mathcal{P} \in OPS^m$  induce, per ogni  $s \in \mathbb{R}$ , un'applicazione continua:*

$$\mathcal{P} : (H^s)^N \mapsto (H^{s-m})^N.$$

*Dunque un OPD di ordine  $m$  fa calare la regolarità se  $m > 0$  e la aumenta se  $m < 0$ .*

**Esempi****1. Moltiplicatori di Fourier**

Se il simbolo  $P(x, \xi) \equiv P(\xi)$  è indipendente da  $x$ , il corrispondente operatore  $\mathcal{P} \equiv Op(P)$  è dato da

$$\widehat{\mathcal{P}U}(\xi) = P(\xi) \widehat{U}(\xi),$$

e viene chiamato *moltiplicatore di Fourier*. Il caso più semplice è quello degli *operatori di transizione*

$$\Lambda^m = (1 + |D|^2)^{m/2} = Op((1 + |\xi|^2)^{m/2}). \quad (13.45)$$

Notiamo che  $\Lambda^m : (H^s)^N \rightarrow (H^{s-m})^N$  è un isomorfismo. Notiamo anche che  $\Lambda^0 = Id$ ,  $\Lambda^2 = I - \Delta$ ,

$$(\Lambda^m u, u)_{L^2} = \|u\|_{H^{m/2}}^2$$

**2. Simboli omogenei**

Sia  $P(x, \xi)$  una funzione (matriciale) *positivamente omogenea* in  $\xi$  di grado  $m \in \mathbb{R}$ , per  $|\xi| \geq 1$ , cioè

$$P(x, \lambda\xi) = \lambda^m P(x, \xi) \quad \forall \lambda \geq 1, |\xi| \geq 1. \quad (13.46)$$

Se  $P(x, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ , le sue derivate in  $x$  sono omogenee di grado  $m$  (per  $|\xi| \geq 1$ ), mentre le sue derivate in  $\xi$  di ordine  $k$  sono omogenee di grado  $m - k$ . Pertanto, se  $|\partial_x^\alpha P(x, \xi)| \leq C_\alpha$  per  $|\xi| = 1$ , si ha che  $P \in S^m$ . D'altra parte, una funzione  $P(x, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  che verifichi la (13.46) per ogni  $\xi \neq 0$  non può essere continua in  $\xi = 0$ , a meno che  $m$  non sia un *intero pari*. Comunque, se  $P(x, \xi)$  è di classe  $\mathcal{C}^\infty$  per  $\xi \neq 0$ , possiamo costruire un simbolo di ordine  $m$  ponendo

$$P_\chi(x, \xi) = \chi(\xi) P(x, \xi)$$

dove  $\chi(\xi)$  è una *funzione cut-off*, cioè una funzione  $\mathcal{C}^\infty$  su  $\mathbb{R}^n$  tale che, per qualche  $r > 0$  ( $\epsilon < 1$ ) si abbia

$$0 \leq \chi(\xi) \leq 1, \quad \chi(\xi) \equiv 0 \text{ per } |\xi| \leq r, \quad \chi(\xi) \equiv 1 \text{ per } |\xi| \geq 1.$$

L'operatore  $\mathcal{P}_\chi \equiv Op(P_\chi)$  dipende dalla scelta della funzione cut-off  $\chi$  in modo molto debole: infatti  $\mathcal{R} = \mathcal{P}_{\chi_1} - \mathcal{P}_{\chi_2}$  è *operatore regolarizzante*, i.e.  $\mathcal{R} : H^s \rightarrow H^{s+k}$  per ogni intero  $k$ . Precisamente:

$$\mathcal{R} \in OPD^{-\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty} OPD^{-k}$$

La costruzione dell'energia per un sistema strettamente iperbolico si basa su tre fondamentali risultati. I primi due riguardano la *composizione* e l'*aggiunto* di OPD, intesi nel senso di operatori sullo spazio  $\mathcal{S}^N$ :

$$(\mathcal{P} \circ \mathcal{Q})u = \mathcal{P}(\mathcal{Q}u), \quad (\mathcal{P}^*u, w)_{L^2} = (u, \mathcal{P}w)_{L^2},$$

mentre il terzo risultato consente di definire un OPD *coercivo* a partire da un simbolo coercivo.

Prima di enunciare questi risultati notiamo che, posto  $PQ(x, \xi) = P(x, \xi)Q(x, \xi)$ ,  $P^* \equiv (P(x, \xi))^*$ , risulta:

$$P \in S^m, Q \in S^k \implies PQ \in S^{m+k}, P^* \in S^m.$$

Inoltre introduciamo la seguente notazione (dove  $h < m$ ):

$$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in OPS^m : \quad \mathcal{P}_1 \sim \mathcal{P}_2 \text{ mod. } OPS^h \iff \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 \in OPS^h.$$

**Teorema 41. (composizione)** *La composizione di due OPD è un OPD, e precisamente:*

$$\mathcal{P} \in OPS^m, \mathcal{Q} \in OPS^k \implies \mathcal{P} \circ \mathcal{Q} \in OPS^{m+k}.$$

Inoltre, se  $\mathcal{P} = Op(P)$  e  $\mathcal{Q} = Op(Q)$ , si ha:

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{Q} \sim Op(PQ) \text{ mod. } OPS^{m+k-1}. \quad (13.47)$$

**Corollario.** *Se, per ogni  $(x, \xi)$ , le matrici  $P(x, \xi)$  e  $Q(x, \xi)$  commutano fra loro, allora*

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q} \circ \mathcal{P} \text{ mod. } OPS^{m+k-1}.$$

**Teorema 42. (aggiunto)** *L'aggiunto di un OPD è un OPD, e precisamente:*

$$\mathcal{P} \in OPS^m \implies \mathcal{P}^* \in OPS^m. \quad (13.48)$$

Inoltre, se  $\mathcal{P} = Op(P)$ , si ha:

$$\mathcal{P}^* \sim Op(P^*) \text{ mod. } OPS^{m-1}. \quad (13.49)$$

**Corollario.** *Se, per ogni  $(x, \xi)$ , la matrice  $P(x, \xi)$  è hermitiana, allora*

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^* \text{ mod. } OPS^{m-1}.$$

**Teorema 43. (dis. di Gårding)** *Sia  $P(x, \xi) \in S^m$  un simbolo matriciale tale che, per qualche  $\delta, R > 0$ ,*

$$\Re(P(x, \xi)v, v) \geq \delta |v|^2 |\xi|^m, \quad \forall v \in \mathbb{C}^N, |\xi| \geq R.$$

*Allora possiamo trovare una costante  $C > 0$  in modo che l'operatore  $\mathcal{P} \equiv P(x, D)$  verifichi la stima*

$$\Re(\mathcal{P}u, u)_{L^2} + C \|u\|_{H^{(m-1)/2}} \geq \frac{\delta}{2} \|u\|_{H^{m/2}}, \quad \forall u \in \mathcal{S}^N. \quad (13.50)$$

Ricorrendo agli operatori di transizione (13.45), possiamo riscrivere la (13.50) nella forma

$$\Re((\mathcal{P} + C\Lambda^{m-1})u, u)_{L^2} \geq \frac{\delta}{2} \|u\|_{H^{m/2}}. \quad (13.51)$$

### 13.7.5 Il simmetrizzatore pseudo-differenziale

Torniamo al sistema strettamente iperbolico (13.26), ponendoci per semplicità nel caso in cui i coefficienti del sistema non dipendono da  $t$ , ed è assente il termine di ordine zero. Consideriamo dunque il sistema

$$u_t = i \mathcal{A} u, \quad \mathcal{A} = \sum_{j=1}^n A_j(x) D_j,$$

ponendo come al solito  $A(x, \xi) = \sum A_j(x) \xi_j$ .

Il simmetrizzatore  $Q(x, \xi)$  associato alla matrice  $A(x, \xi)$  (vedi § 13.7.1) è una matrice hermitiana e coerciva (per  $\xi \neq 0$ ) tale che anche la matrice  $Q(x, \xi)A(x, \xi)$  è hermitiana. Inoltre  $Q(x, \xi)$  è una funzione matriciale di classe  $C^\infty$  su  $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{\xi = 0\}$ , omogenea di grado zero in  $\xi$ , pertanto, fissata una funzione cut-off  $\chi(\xi)$ , otteniamo un simbolo matriciale hermitiano  $\mathcal{Q}_\chi = \chi(\xi)Q(x, \xi) \in S^0$  al quale corrisponde l'operatore

$$\mathcal{Q}_\chi = Op(\chi(\xi)Q(x, \xi)) \in OPS^0.$$

Consideriamo la decomposizione

$$\mathcal{Q}_\chi = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_\chi + \mathcal{Q}_\chi^*) + \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_\chi - \mathcal{Q}_\chi^*);$$

grazie al Corollario al Teor. 42 sappiamo che

$$\mathcal{R} \equiv \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_\chi - \mathcal{Q}_\chi^*) \in OPS^{-1},$$

da cui segue, per qualche costante  $C$ ,

$$\|\mathcal{R}u\|_{L^2}^2 \leq C \|u\|_{H^{-1}}^2 \leq C \|u\|_{H^{-1/2}}^2 = C (\Lambda^{-1}u, u).$$

Per definire un'energia (positiva) di una data soluzione  $u$  del nostro sistema, dobbiamo modificare l'operatore  $\mathcal{Q}_\chi$  in modo da renderlo *autoaggiunto e coercivo*: ciò è possibile, grazie alla disegualianza di Gårding con  $m = 0$ , dal momento che il simbolo  $Q_\chi(x, \xi) \equiv \chi(\xi)Q(x, \xi)$  di tale operatore è hermitiano e coercivo per  $|\xi| \geq 1$ . Per avere un OPD autoaggiunto e coercivo che sia equivalente a  $\mathcal{Q}_\chi$  mod. operatori di ordine inferiore, basta allora prendere

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}_\chi + \mathcal{Q}_\chi^*) + C \Lambda^{-1},$$

con  $C$  costante sufficientemente grande. A questo punto definiamo l'energia di una soluzione  $u$  come

$$E(t) = (\mathcal{Q}_1 u, u)_{L^2},$$

e, derivando in  $t$ , troviamo:

$$E'(t) = (\mathcal{Q}_1 u_t, u)_{L^2} + (\mathcal{Q}_1 u, u_t)_{L^2} = i((\mathcal{Q}_1 \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \mathcal{Q}_1)u, u)_{L^2}. \quad (13.52)$$

Per stimare  $E'(t)$  ricorriamo ai Teoremi 41 e 42 sulla composizione e l'aggiunto, dai quali segue che, per ogni  $\mathcal{P} \in OPS^0$  risulta  $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^*$  mod.  $OPS^{-1}$ ; mentre per ogni  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in OPS^0$  e  $\mathcal{A} \in OPS^1$ , si ha

$$\mathcal{P}_1 \sim \mathcal{P}_2 \text{ mod. } OPS^{-1} \implies \mathcal{P}_1 \mathcal{A} \sim \mathcal{P}_2 \mathcal{A} \text{ mod. } OPS^0.$$

Notando che  $\mathcal{Q}_1 \sim \mathcal{Q}_\chi$  mod.  $OPS^{-1}$ , e che (essendo  $Q_\chi(x, \xi)A(x, \xi) \equiv \chi(\xi)Q(x, \xi)A(x, \xi)$  hermitiana)

$$\mathcal{Q}_\chi \mathcal{A} \sim Op(\mathcal{Q}_\chi \mathcal{A}) = Op((\mathcal{Q}_\chi \mathcal{A})^*) \sim (Op(\mathcal{Q}_\chi \mathcal{A}))^* \sim (\mathcal{Q}_\chi \mathcal{A})^* \text{ mod. } OPS^0,$$

troviamo:

$$\mathcal{Q}_1 \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \mathcal{Q}_1 \sim \mathcal{Q}_\chi \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \mathcal{Q}_\chi \sim \mathcal{Q}_\chi \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \mathcal{Q}_\chi^* = (\mathcal{Q}_\chi \mathcal{A}) - (\mathcal{Q}_\chi \mathcal{A})^* \sim 0 \text{ mod. } OPS^0.$$

Ma allora  $\mathcal{Q}_1 \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \mathcal{Q}_1$  opera con continuità su  $L^2$ , e quindi dalla (13.52) possiamo concludere che

$$E'(t) \leq C E(t).$$

e quindi, per la coercività di  $\mathcal{Q}_1$ , otteniamo la stima a priori della norma  $L^2$  della soluzione  $u(x, t)$ .  $\square$