§ 1. - FUNZIONI ESPONENZIALI

Sia a un numero reale positivo. Per ogni intero $n > 0$ si pone

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

Si verificano allora immediatamente le proprietà:

$$(*) \qquad \begin{aligned} & a^x > 0 \\ & a^x \cdot a^y = a^{x+y} \\ & (a^x)^y = a^{xy} \\ & (ab)^x = a^x b^y \end{aligned}$$

dove a,b sono numeri reali > 0, x e y sono interi > 0.

Vogliamo ora definire il numero reale a^x, con x numero reale arbitrario, in modo che valgano ancora le proprietà (*). Procediamo supponendo dapprima che x sia della forma $1/n$, poi che sia un numero razionale ed infine un numero reale generico.

Sia $x = 1/n$ (n intero > 0); per le (*), a^x deve verificare le condizioni

$$a^x > 0$$
$$(a^x)^n = a$$

Pertanto a^x può essere considerata come una soluzione positiva dell'equazione

$$(1) \qquad t^n = a \qquad \text{(t incognita)}$$

Ora, per ogni dato $a > 0$, la (1) ammette una ed una sola soluzione $t > 0$: ciò può essere verificato graficamente studiando la funzione

$$f(t) = t^n \quad \text{per } t \geq 0$$

Tale funzione è certamente continua, $f(0) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ (infatti $t^n \geq t$, per $t \geq 1$) e inoltre è strettamente crescente giacchè dalla formula

$$t_2^n - t_1^n = (t_2 - t_1)(t_2^{n-1} + t_2^{n-2} t_1 + \ldots\ldots + t_2 t_1^{n-2} + t_1^{n-1})$$

segue $t_2^n > t_1^n$ per $t_2 > t_1 \geq 0$.

In definitiva si chiama $a^{1/n}$ l'unica soluzione positiva della (1).

Sia ora x un numero razionale > 0.

Posto $x = m/n$ (m,n interi > 0) si definisce

$$(2) \qquad a^{m/n} = (a^{1/n})^m$$

(in modo che le (*) siano ancora soddisfatte).

E' bene però dimostrare che, se $m/n = m'/n'$, allora

$$a^{m/n} = a^{m'/n'}$$

Poniamo $m' = km$, $n' = kn$, si ha:

$$(a^{1/kn})^{km} = \left[(a^{1/kn})^k\right]^m = \left\{\left[(a^{1/kn})^{kn}\right]^{1/n}\right\}^m = \left[a^{1/n}\right]^m$$

Si è così provato che la definizione (2) non è ambigua.

Per definire poi a^x con x razionale ≤ 0, basta porre

$$(3) \qquad \begin{aligned} a^o &= 1 \\ a^x &= (1/a)^{-x} \end{aligned}$$

Occorre ora verificare le (*) con x,y numeri razionali.

La prima e l'ultima delle proprietà (*) sono quasi immediate; proviamo le restanti due quando x e y sono razionali positivi.

Per la seconda conviene scrivere x e y nella forma $x = m/n$, $y = k/n$ (cosa sempre possibile eseguendo il minimo comun denominatore):

$$a^x \cdot a^y = a^{m/n} \cdot a^{k/n} = (a^{1/n})^m \cdot (a^{1/n})^k = (a^{1/n})^{m+k} = a^{(m+k)/n} = a^{m/n + k/n} =$$
$$= a^{x+y}$$

Per dimostrare la terza proprietà conviene invece scrivere x e y nella forma $x = m/n$, $y = k/m$ (se $x = p/q$, $y = r/s$ si ha anche $x = ps/qs$ e $y = qr/qs$):

$$(a^x)^y = (a^{m/n})^{k/m} = \left[\left((a^{1/n})^m\right)^{1/m}\right]^k = (a^{1/n})^k = a^{k/n} = a^{x \cdot y}$$

Se poi x e y non sono entrambi > 0, le (*) si ottengono subito ricordando le definizioni (3).

Per definire a^x con x reale qualsiasi, occorre premettere alcune considerazioni sulla funzione

$$f(x) = a^x \qquad (x \text{ razionale})$$

A questo scopo supporremo $a > 1$ (il caso $0 < a < 1$ si riconduce al precedente ricordando che $a^x = (1/a)^{-x}$).

<u>Osservazione</u> 1.

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

(con x_1, x_2 numeri razionali; $a > 1$)

- Dim.

Poichè $a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_2}(a^{x_2 - x_1} - 1)$ (per le (*))

basterà verificare che $x > 0 \Longrightarrow a^x > 1$ (si è posto $x = x_2 - x_1$).

Sia ora $x = m/n$, $a^{m/n} = (a^{1/n})^m$, basta allora verificare che $a^{1/n} > 1$, e questo è immediato in quanto se fosse $a^{1/n} \leq 1$ si avrebbe anche $a = (a^{1/n})^n \leq 1^n = 1$ mentre per ipotesi $a > 1$.

<u>Osservazione</u> 2.

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1 \qquad (x \text{ razionale})$$

- Dim.

Per la Oss. 1., a^x è monotona crescente quindi esistono il limite destro ed il limite sinistro (sempre per $x \to$ o con x razionale).
E' sufficiente pertanto verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} a^{-1/n} = 1$$

e anzi, essendo $a^{-1/n} = \frac{1}{a^{1/n}}$, basta verificare che $\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1$.
Ciò può essere fatto procedendo per assurdo:

se fosse ($\forall n = 1,2,3,\ldots.$)

$$a^{1/n} \geqq 1 + \delta \qquad \text{con } \delta > 0,$$

si avrebbe

$$a \geqq (1+\delta)^n \qquad (\forall n = 1,2,3,\ldots\ldots).$$

Ma è facile d'altra parte mostrare che $(1+\delta)^n \geqq n\delta$ e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} (1+\delta)^n = +\infty$$

che è contraddittorio.

Osservazione 3.

Per ogni $\varepsilon > 0$, ed ogni intero $k > 0$ esiste $\delta = (\varepsilon, k) > 0$ tale che: per x_1, x_2 razionali, con $|x_1| \leqq k$, $|x_2| \leqq k$

$$|x_1 - x_2| \leqq \delta \implies |a^{x_1} - a^{x_2}| \leqq \varepsilon$$

- Dim.

Si ha:

$$|a^{x_1} - a^{x_2}| = |a^{x_1}(1 - a^{x_2 - x_1})| \leqq$$

$$\leqq a^k |1 - a^{x_2 - x_1}|$$

e allora la tesi segue immediatamente dalla Oss. 2. .

L'Oss. 1., permette di affermare che per ogni numero reale x, esistono

$$\lambda_1(x) = \sup \{ a^r \mid r \text{ razionale} < x \}$$
$$\lambda_2(x) = \inf \{ a^s \mid s \text{ razionale} > x \}$$

mentre l'Oss. 3. permette di concludere che $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$.

E' pertanto naturale dare la definizione:

$$(4) \qquad a^x = \sup \{ a^r \mid r \text{ razionale} < x \} = \inf \{ a^s \mid s \text{ razionale} > x \}$$

Osserviamo anche che ogni numero reale è limite di una successione di razionali, e quindi si ha

$$(5) \qquad \{r_n\} \longrightarrow x \ (r_n \text{ razionale}) \implies a^{r_n} \longrightarrow a^x$$

Si noti che per x razionale, le definizione (4) coincide con la precedente definizione di a^x. Restano da verificare le (*) nel caso x,y reali qualunque; ma per questo basta utilizzare la (5) e passare al limite. Con facili passaggi al limite (e sempre utilizzando la (5) si verificano anche la crescenza e la continuità della funzione

$$f(x) = a^x \qquad (x \text{ reale; } a>1)$$

Nel caso, infine, che sia $0<a<1$, la funzione a^x è decrescente.

Poichè la $f(x) = a^x$ $(a>1)$ é continua, strettamente crescente e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

è possibile risolvere, per ogni $y>0$, l'equazione

$$a^x = y$$

in uno ed un solo modo.

Si pone $x = \lg_a y$ $(y>0)$. La funzione $\lg_a x$, definita per $x>0$ $(a>1)$, inversa della a^x, è continua e strettamente crescente. Inoltre si verifica facilmente che:

$$\lim_{x\to 0^+} \lg_a x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \lg_a x = +\infty$$

$$\lg_a(x_1x_2) = \lg_a x_1 + \lg_a x_2$$

$$\lg_a(x^c) = c\cdot\lg_a x$$

$$\lg_a x = \frac{\lg_b x}{\lg_b a} \qquad (a,b>1).$$

§ 2. - IL NUMERO e

Sia a un numero reale >1; dato che

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x\,\frac{a^h - 1}{h},$$

si vede che la funzione $f(x) = a^x$ è derivabile in ogni punto x se e solo se esiste finito

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

Mostriamo che tale limite esiste. A questo proposito consideriamo la funzione

$$g(h) = \frac{a^h - 1}{h}$$

definita per $h\neq 0$ $(a>1)$.

Osservazione 4.

$g(h)$ è una funzione crescente.

- Dim.

Poichè a^x è una funzione continua (vedi § 1.), basta verificare che $g(h)$ è crescente per h razionale $\neq 0$.
Supponiamo $0 < h_1 < h_2$, $h_1 = m/n$, $h_2 = k/n$ e mostriamo che $g(m/n) < g(k/n)$.
Per questo basta verificare che

$$g(m/n) < g(m+1/n) \text{ cioè } \frac{(a^{1/n})^m - 1}{m/n} < \frac{(a^{1/n})^{m+1} - 1}{(m+1)/n} \qquad \text{ovvero}$$

$$(6) \qquad \frac{b^m - 1}{m} < \frac{b^{m+1} - 1}{m+1} \qquad \text{con } b = a^{1/n} > 1$$

La (6) equivale alla:

$$(b^m - 1)(m + 1) < (b^{m+1} - 1)m$$

cioè

$$mb^m + b^m - 1 < mb^{m+1}$$

o anche

$$b^m - 1 < mb^m(b - 1)$$

e questo è ovvio in quanto, essendo $b > 1$ si ha:

$$b^m - 1 = (b - 1)\cdot(b^{m-1} + b^{m-2} + \ldots + b + 1) <$$

$$< (b - 1)\cdot(b^m + b^m + \ldots + b^m + b^m) = (b - 1)mb^m$$

Analogamente si prova che

$$g(-\frac{m+1}{n}) < g(-\frac{m}{n})$$

Infine si ha:

$$g(-h) = \frac{a^{-h} - 1}{-h} = a^{-h}\,\frac{(a^h - 1)}{h} = a^{-h}\,g(h)$$

e quindi, per $h > 0$

$$g(-h) < g(h)$$

da cui la tesi.

Osservazione 5.

Esiste finito $\lambda(a) = \lim_{h\to o} \frac{a^h - 1}{h}$

- Dim.

Per l'Oss. 4, esistono $\lambda_+(a) = \lim_{h\to o^+} \frac{a^h - 1}{h}$, $\lambda_-(a) = \lim_{h\to o^-} \frac{a^h - 1}{h}$;

ma, essendo

$$\frac{a^{-h} - 1}{-h} = a^{-h}\,\frac{a^h - 1}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h\to o} a^{-h} = 1 ,$$

si ha anche

$$\lambda_+(a) = \lambda_-(a)$$

Si può allora concludere che la funzione a^x, per $a>1$, è derivabile su tutto l'asse reale, e si ha

$$Da^x = a^x \cdot \lambda(a)$$

dove

$$\lambda(a) = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Se $a<1$, si ottiene (procedendo allo stesso modo) il medesimo risultato.

Vediamo ora se, per un'opportuna base $a_0>0$, si può ottenere $\lambda(a_0) = 1$ e quindi $Da_0^x = a_0^x$. Ciò permetterebbe di trovare una funzione che coincide in ogni punto con la propria derivata.
A questo proposito osserviamo che, per ogni $b>1$, si ha:

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{b^{(\lg_b a^h)} - 1}{h} = \frac{b^{h\lg_b a} - 1}{h} = \frac{b^{h\lg_b a} - 1}{h\lg_b a} \lg_b a = \frac{b^{h'} - 1}{h'} \lg_b a$$

dove $h' = h\lg_b a$ e quindi $\lim_{h\to 0} h' = 0$; pertanto si ha

$$\lambda(a) = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lambda(b)\cdot \lg_b a$$

In particolare, per $b = 10$, $\lambda(a) = \lg_{10} a \cdot \lambda(10)$.

Poichè $\lg_{10}\xi$ è una funzione strettamente crescente che varia da 0 a $+\infty$ quando $1 \leq \xi < +\infty$, esiste uno ed un solo valore $a_0 > 1$ per cui

$$\lambda(a_0) = 1$$

Questo numero a_0 viene chiamato il numero di Neper e indicato convenzionalmente con la lettera e.

In conclusione si ha

$$De^x = e^x$$

$$Da^x = a^x \cdot \lg a$$

dove si è posto $\lg a = \lg_e a$.

Per calcolare, in modo approssimato, il valore del numero e, si utilizza la formula

$$(7) \qquad \lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

(Dim. della (7)):

$$(1 + x)^{1/x} = e^{\lg(1+x)^{1/x}} = e^{(1/x)\lg(1+x)}$$

ora

$$(1/x)\lg(1+x) = \frac{y}{e^y - 1}$$

dove si è posto $y = \lg(1+x)$.

Poichè $\lim_{x \to 0} y = 0$ e $\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$, si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \lg(1 + x) = 1$$

da cui la (7). In particolare $\lim_{n \to +\infty} (1 + 1/n)^{1/n} = e$.

Notiamo inoltre che la funzione

$$\frac{e^y - 1}{y} \qquad \text{è crescente} \quad (e > 1)$$

e quindi

$$\frac{y}{e^y - 1} \qquad \text{è decrescente}$$

mentre

$$\lg(1 + x) \qquad \text{è crescente;}$$

ne consegue che la funzione composta

$$\frac{1}{x} \lg(1 + x) \quad \text{è decrescente}$$

e quindi anche

$$(1 + x)^{1/x} \qquad \text{è decrescente.}$$

In particolare si avrà (per $x = \pm 1/n$):

$$(1 + 1/n)^n \leq e \leq (1 - 1/n)^{-n}$$

e anche, essendo

$$(1 - \frac{1}{n})^{-n} = (\frac{n}{n-1})^n = (1 + \frac{1}{n-1})^n ,$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n \leq e \leq (1 + \frac{1}{n-1})^n = (1 + \frac{1}{k})^{k+1} \qquad (n,k = 1,2,3,\ldots)$$

In questo modo è possibile valutare e con un grado di approssimazione arbitrariamente alto; si ottiene:

$$e = 2,718281828459045\ldots..$$

(S. S. 1971)