Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica
Tortorelli

I foglio di esercizi (complemento): richiami su misura ed integrazione secondo Lebesgue

---

Notazione: la misura di Lebesgue viene denotata con m o $\mathcal{L}$, eventualmente con m^d o $\mathcal{L}^d$ essendo d la dimensione, spesso un insieme $\{x : f(x) \in A\}$ viene semplicemente notato con $\{f \in A\}$, o abbreviazioni simili.
Legenda: con $\bullet$ si indicano gli esercizi più impegnativi, con $\circ$ quelli di approfondimento o estensione e quelli più teorici, con $\frown$ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

$\circ$ ESERCIZIO n. 1 (completezza della misura di Lebesgue) Un insieme contenuto in un insieme di misura nulla è misurabile. [cfr. es 14].

Nota: si osserva che la nozione "insieme di misura nulla (secondo Lebesgue)", e quindi la nozione di quasi ovunque, non richiede di avere la misura di Lebesgue: infatti si richiede che l'insieme sia contenuto in un' unione numerabile di iper-rettangoli cartesiani con serie delle misure elementari arbitrariamente piccola.

$\frown$ ESERCIZIO n. 2 Sia $f \geq 0$ qualsiasi. Se $\sup\{\int \varphi : \varphi \leq f \ q.o.\} = \inf\{\int \psi : f \leq \psi \ q.o.\} < \infty$ allora f è misurabile.

ESERCIZIO n. 3 a- Sia $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una numerazione di un insieme denso numerabile in $[0;1]$. Sia $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di numeri positivi con serie di somma minore di 1 $0 < q_n - \rho_n < q_n + \rho_n < 1$. L'insieme $[0;1] \setminus \bigcup]q_n - \rho_n; q_n + \rho_n[$ è Lebesgue misurabile? è Peano-Jordan misurabile [cfr. es 14] ?

b- Si costruisca una funzione limitata sommabile che non coincide quasi ovunque con alcuna funzione Riemann integrabile [cfr. es 14].

$\bullet$ ESERCIZIO n. 4 a- Si consideri una successione di numeri β_n, $n \in \mathbf{N}$, positivi per cui $\sum 2^n \beta_n < 1$. Si definisca per ricorrenza G_{n+1} a partire da $G_0 = [0;1]$ togliendo da ogni componente connessa di G_n l'intervallo centrale di ampiezza β_n. Si provi che la costruzione è sempre possibile. Si provi che le funzioni indicatrici di tali insiemi convergono alla funzione indicatrice di un insieme G misurabile non equivalente a nessun misurabile secondo Peano-Jordan [cfr. es 14].
Per ogni intervallo aperto $I \subseteq]0;1[$ se $I \cap G \neq$ allora $0 < m(I \cap G) < m(I)$.

ESERCIZIO n. 5 Si trovi un insieme misurabile $E \subseteq \mathbf{R}$ di misura finita per cui comunque dato un intervallo I si abbia $0 < m(E \cap I) < m(I)$.

$\frown$ $\circ$ ESERCIZIO n.6 a- Se M è misurabile di misura finita e non nulla allora
$x \mapsto m(M \setminus (M + x))$ è continua. [Si usi l'approssimazione aperto compatto.]
b- Si trovi un controesempio se M ha misura infinita.

c- Se A è misurabile con misura positiva allora l'insieme $A - A = \{x : x = a - \alpha\ , a,\ \alpha \in A\}$ è un intorno di 0. [Si mostri che se x è piccolo allora $m(M \cap (x + M)) > 0$ e quindi $M \cap (x + M) \neq \emptyset$.]
d- Sia V un insieme di rappresentanti delle classi di equivalenza di $\mathbf{R}^d/\mathbf{Q}^d$. Si provi che $\mathbf{R}^d = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}^d}(V + q)$, e che $(V - V) \cap \mathbf{Q}^d = \{0\}$. Se ne deduca che V è non misurabile.
e- Si provi che ogni insieme misurabile di misura positiva contiene un non misurabile.

$\frown$ ESERCIZIO n.7 Si provi la diseguaglianza di Tschebyshev:

$$m(E \cap \{|f| \geq \varepsilon\}) \ \leq \ \frac{1}{\varepsilon} \int_{E \cap \{|f| \geq \varepsilon\}} |f| dm$$

ESERCIZIO n.8 Si considerino le seguenti costruzioni induttive

$$\begin{cases} C_0 & = \ [0;1] \\ \\ C_{n+1} & = \ 1/3C_n \cup (2/3 + 1/3C_n) \end{cases}$$

$$f_0(x) \ = \ x \ , \quad f_{n+1}(x) \ = \ \begin{cases} 1/2f_n(3x) & 0 \leq x \leq 1/3 \\ 1/2 & 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 1/2f_n(3x - 2) + 1/2 & 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a- Si provi che l'insime di Cantor $C = \bigcap C_n$ è un chiuso totalmente sconnesso senza parte interna e senza punti isolati di misura nulla.
b- Osservando che $|f_{n+1} - f_n| \leq 1/2^n$ si provi che la successione di funzioni converge uniformemente.
c- Detto f il suo limite (chiamato "scala del diavolo" o funzione di Vitali-Cantor) si provi che $f([0;1] \setminus C)$ è numerabile.
d- Si provi che f è continua e trasforma un misurabile in un non misurabile.
e- Sia $g(x) = x + f(x),\ \ g : [0;1] \mapsto [0;2]$. Si provi che un è omeomorfismo tra i due intervalli, che $m(g(C)) > 0$ e quindi che g^{-1} è un omeomorfismo che trasforma un misurabile in un non misurabile.

$\frown$ ESERCIZIO n.9 a- Una funzione Lipschitziana tra domini di $\mathbf{R}^d$, trasforma insiemi nulli per m^d in insiemi nulli per m^d
b- Una funzione continua che trasforma insiemi m^d nulli in insiemi m^d nulli trasforma domini misurabili di $\mathbf{R}^d$ in domini misurabili di $\mathbf{R}^d$. [Ogni misurabile è unione di un nullo e di un iniseme numerabile di compatti.]

$\frown$ ESERCIZIO n.10 Sia f sommabile. Si provi
a- $\lim_{R \to \infty} \int_{\{|f| \geq R\}} |f| dm \ = \ 0$
b- $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m(|f| \geq \frac{1}{\varepsilon})}{\varepsilon} \ = \ 0$
c- (Assoluta continuità delle misure con densità sommabile) Se $\int |f| dm < \infty$
$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \quad m(A) < \delta \ \ \Rightarrow \ \ \int_A |f| \ < \varepsilon$

$\frown$ ESERCIZIO n.11 a- Si trovi una successione di funzioni che converge in misura a zero ma non vi converge quasi ovunque .
b- Si trovi una successione di funzioni che converge in misura a zero per cui gli integrali dei moduli non convergono a zero..
c- Trovare una successione di funzioni per cui gli integrali dei moduli convergono a zero ma non converge quasi ovunque.
d- Trovare una successioni di funzioni su un insieme di misura finita che converge a zero quasi ovunque con integrali dei moduli non convergenti a zero.
e- Trovare una successione di funzioni che converge a zero quasi ovunque ma non converge in misura.

$\frown$ ESERCIZIO n. 12 a- Se una successione di funzioni converge in misura a zero allora vi è una sottosuccessione che vi converge quasi ovunque.
b- Se vi è convergenza a zero degli integrali dei moduli allora la successione di funzioni converge a zero in misura.
c- Se una successione di funzioni con moduli maggiorati dalla stessa funzione sommabile converge a zero in misura allora convergono a zero gli integrali dei moduli.
d- Una successione di funzioni su un insieme di misura finita che converge a zero quasi ovunque converge a zero in misura.

$\circ$ ESERCIZIO n.13 a- La convergenza quasi ovunque non deriva da una distanza.
(b- La convergenza puntuale di funzioni reali definite su X deriva da una distanza se e solo se X è al più numerabile.[cfr. "Topology" , J.Dugundji, XII.9.5 pagg. 273-274, Allyn-Bacon 1966)]).
c- Sia E di misura *finita* non nulla, si provi che

$$d_1(f,g) = \int_E 1 \wedge (|f-g|)dm \ , \quad d_2(f,g) = \int_E \frac{|f-g|}{1+|f-g|}dm \ , \quad d_3(f,g) = \int_E \operatorname{artan}(|f-g|)dm$$

definiscono delle distanze sulle classi di equivalenza delle funzioni misurabili, per le quali la convergenza di successioni è equivalente a quella in misura.

$\circ$ ESERCIZIO n.14
DEFINIZIONE :

- Si dice che un insieme *limitato* è Peano-Jordan misurabile se è limitato e se l'estremo superiore delle misure elementari delle unioni di iper-rettangoli 'cartesiani', con parti interne disgiunte, contenute nell'insieme è uguale all'estremo inferiore delle misure elementari delle unioni di iper-rettagnoli 'cartesiani' contenenti l'insieme.

È noto che una funzione non negativa limitata è Riemann integrabile se il suo sottografico è Peano-Jordan misurabile, ed inoltre un insieme è PJ-misurabile se la funzione caratteristica risulta Riemann integrabile.
a- Un insieme compatto di misura nulla è anche Peano-Jordan misurabile.
b- Un insieme compatto con parte interna vuota e di misura di Lebesue positiva non può essere Peano-Jordan misurabile.
c- Un limitato in uno spazio euclideo è Peano-Jordan misurabile se e solo se la sua frontiera ha misura nulla.