Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

II foglio di esercizi: Spazi L^p

Legenda: $\bullet$ esercizi più impegnativi, $\circ$ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, $\frown$ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

$\frown$ ESERCIZIO n.11 I foglio: relazioni tra diversi tipi di convergenza di funzioni.

$\frown$ ESERCIZIO n.12 I foglio: convergenza in misura.

$\frown$ ESERCIZIO n.0a- Per quali $p \geq 0$ la funzione $\frac{1}{|x|}$ è in $L^p(B)$, essendo B la palla unitaria di $\mathbf{R}^n$?

b- Per quali $p \geq 0$ la funzione $\frac{1}{|x|}$ è in $L^p(\mathbf{R}^n \setminus B)$?

11Ex1E3 Sia dato p tale che $1 \leq p \leq +\infty$. Dare un esempio di successione limitata in $L^p(\mathbf{R})$ che converge a 0 quasi ovunque, ma non converge a 0 in norma L^p.

11Ex1E6a Siano f ed f_n con $n = 1, 2, \ldots$ funzioni continue su $\mathbf{R}^m$ tali che f_n converge ad f in $L^1(B)$ per ogni palla B centrata nell'origine.

a) Dimostrare che f_n converge ad f in $L^1(E)$ per ogni insieme misurabile e limitato E.

11Ex3E3 Per ogni n intero positivo, si ponga $f_n(x) := \dfrac{n}{1 + n^4(x-n)^2}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Dire per quali $p \in [1, +\infty)$ la successione f_n converge in $L^p(\mathbf{R})$ e calcolarne il limite.

$\frown$ 12Ex2E1 Sia f una funzione in $L^p(\mathbf{R})$ con $1 \leq p \leq 2$. Dimostrare che si può scomporre f come $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in L^1$ e $f_2 \in L^2$.

12Ex3E3 Dimostrare che la palla chiusa K di centro 0 e raggio 1 in $L^p(0;1)$ non è compatta per alcun $p \in [1; +\infty]$.

$\frown$ ESERCIZIO n.1 Sia f una misurabile non negativa e si definisca $\omega_f(t) = m(\{f > t\})$.

a- ω_f è decrescente; b- ω_f è continua a destra; c- $\inf\{t : \omega_f = 0\} = \min\{t : \omega_f = 0\}$

d- se f è a valori reali e nulla fuori da un insieme di misura finita oppure è sommabile allora

$$\omega_f \to 0, \quad t \to \infty$$

e- se $p > 0$ allora $\displaystyle\int_{\{f>a\}} f^p dm = p \int_a^{+\infty} t^{p-1} m(f > t) dt \; + \; a^p m(f > a)$

$\circ$ ESERCIZIO n.2 a- Si consideri lo spazio vettoriale L^0 quoziente delle funzioni, misurabili definite su un insieme E di *misura finita* non nulla e a valori in $\mathbf{R}$, rispetto all'equivalenza di esser diverse su un insieme di misura nulla. La funzione

$$d(f,g) = \inf\{\rho : m(\{|f-g| > \rho\}) \leq \rho\} \quad f,\ g \in \mathrm{L}^0$$

- definisce una distanza, invariante per traslazione, che rende continue somma e prodotto,
- la convergenza di successioni indotta è quella in misura di successioni di funzioni,
- lo spazio metrico così definito è completo.
- le operazioni indotte nel quoziente da $f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $f \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ sono continue .

Nota: $d(f,0)$ è la lunghezza massima del lato di un quadrato con vertice nell'origine contenuto nel sottografico della funzione $\mu(t) = m(\{|f| > t\})$.

- b Se M ha misura infinita che osservazioni possono essere fatte in analogia con lo spazio delle funzioni continue su tutto $\mathbf{R}$ e l'uso della norma dell'estremo superiore della differenza?

$\circ \frown$ ESERCIZIO n.3 Se f è una funzione misurabile allora
a- Se essup $|f| =: \|f\|_\infty \ = \ \inf\{\rho : |f| \leq \rho$ q.o. $\}$ allora tale estremo inferiore è un minimo e quindi $f \leq \|f\|_\infty$ q.o. (vi è un insieme E nullo per cui $\sup_{\,^cE} |f| = \|f\|_\infty$) .
b- Si provi che $\ \|f\|_\infty \ = \ \inf\{\rho : |f| \leq \rho$ q.o. $\} \ = \ \sup\{\rho : m(\{|f| > \rho\}) > 0\}$
c- Se $\|f_n\|_\infty \to 0$, allora vi è E di misura nulla per cui $f_n \to 0$ uniformemente su $\,^cE$.
d- Si provi che L^∞, l'insieme quoziente rispetto all'eguaglianza quasi ovunque delle funzioni f *essenzialmente limitate*, $\|f\|_\infty\| < \infty$, è uno spazio vettoriale con le operazioni di reticolo indotte da $f \wedge g$, $f \vee g$, e $\|f\|_\infty$ è una norma che lo rende completo.

$\circ$ ESERCIZIO n.4 a- $x,\ y \geq 0$: per $0 < p \leq 1$ si ha $(x+y)^p \leq x^p + y^p$; per $p > 1$ si ha $(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p)$.
b- Si deduca direttamente dal punto precedente che le funzioni con potenza p, $0 < p < \infty$ sommabile formano anch'esse uno spazio vettoriale e un reticolo con le operazioni $f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $f \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.
c- Gli spazi quozienti per l'eguaglianza quasi ovunque, indicati con L^p, $0 < p < \infty$, sono anch'essi reticoli e spazi vettoriali metrici completi:

- nel caso $0 < p < 1$ la distanza è data da $\int |f-g|^p dm$,
- nel caso $1 \leq p < \infty$ la distanza è indotta dalla norma (cfr. diseguaglianza di Minkowski) $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int |f|^p dm}$

$\frown$ ESERCIZIO n. 5 a- Sia $f : [0; +\infty[\to [0; +\infty[$ continua e strettamente crescente con $f(0) = 0$ allora si provi

$$a \cdot b \ \leq \ \int_0^a f(t)dt \ + \ \int_0^b f^{-1}(s)ds, \quad 0 < a, 0 < b < \sup f.$$

L'equaglianza vale se e solo se $b = f(a)$ [E' utile un'interpretazione grafica] .
b- Se $f(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, se ne deduca la diseguaglianza di Young per $p = 1+\alpha$ e si caratterizzino le funzioni per cui vale l'eguaglianza.
c- Per quali coppie di funzioni vale la diseguaglianza stretta di Hölder?

$\frown$ ESERCIZIO n.6 a- Sia f misurabile a valori in $\overline{\mathbf{R}}$ non negativa, posto :

$$f_n(x) =: \sum_{h=1}^{n2^n} \frac{h-1}{2^n} \chi_{\{\frac{h-1}{2^n} \leq f < \frac{h}{2^n}\}}(x) \quad + \quad n\chi_{\{f \geq n\}}$$

si provi che f_n è crescente e tende ad f. Nel caso f sia limitata la convergenza è uniforme.
b- Si provi che le funzioni semplici son dense in L^p, $0 < p \leq +\infty$. Se l'insieme di definizione ha misura finita le funzioni semplici son dense anche per $p = 0$.
c - Se $f \in L^p$, allora $(f \wedge n) \vee (-n)$ converge in L^p ad f.

$\circ$ ESERCIZIO n. 7 Sia (Y, d) uno metrico separabile, (y_n) una numerazione iniettiva di un suo sottoinsieme denso numerabile. Si definisce il "proiettore N-simo" cha associa a y il *primo* tra gli $y_1 \ldots, y_N$ a lui più vicini

$$P_N : Y \to \{y_1, \ldots y_N\} \quad P_N(y) = y_k : \quad k = \min\{i \leq N : d(y, y_i) = \min\{d(y, y_j) : j \leq N\}\}$$

-a Le successioni $d_N(y) = d(P_N(y), y)$ sono decrescenti in N
-b $d_N(y) \to y, \quad N \to \infty$
-c le funzioni d_N sono Boreliane (preimmagine di chiusi sta nella più piccola sigma-algebra contenente gli aperti).
-d ogni funzione misurabile a valori in uno spazio metrico separabile è limite puntuale di funzioni misurabili con immagine finita.
-e ogni funzione misurabile a valori in uno spazio metrico separabile con immagine totalmente limitata è limite uniforme ($\sup d(f, f_N) \to 0$) di funzioni misurabili con immagine finita.

$\frown$ ESERCIZIO n. 8 a- Le funzioni semplici con un numero finito di valori (combinazioni lineari di caratteristiche) e con supporto di misura finita sono dense in $L^p(\mathbf{R})$, $p < \infty$.
b - Si provi che le funzioni caratteristiche di aperti di misura finita sono approssimabili in $L^p(\mathbf{R})$, $p < \infty$, da caratteristiche di unioni finite di intervalli disgiunti.
c - Le combinazioni lineari di caratteristiche di intervalli sono dense in $L^p(\mathbf{R})$, $p < \infty$.
d- Si provi che le combinazioni lineari di caratteristiche di intervalli diadici $[\frac{k-1}{2^n}; \frac{k}{2^n}[$ sono dense $L^p(\mathbf{R})$, $p < \infty$. Si deduca da ciò che $L^p(\mathbf{R})$, $p < \infty$ è separabile.

ESERCIZIO n. 9 a- Sia $\mathcal{F} = \{\chi_{[0;s]} : 0 \leq s \leq 1\} \subset L^\infty(0;1)$, se $f \neq g \in \mathcal{F}$ allora $\|f - g\|_\infty = 1$.
b- Si provi che $L^\infty[0;1]$ non è separabile

ESERCIZIO n. 10 Si estendano i risultati di separabilità (e non) dei precedenti esercizi nel caso di $L^p(E)$, $p \leq \infty$, con $E \subseteq \mathbf{R}^d$ e $m(E) > 0$.

11Ex4E5ab Per ogni coppia di funzioni reali g_1, g_2 definite su $\mathbf{R}$ sia $g_1 \otimes g_2$ la funzione su $\mathbf{R}^2$ definita da $g_1 \otimes g_2(x_1, x_2) := g_1(x_1)\, g_2(x_2)$. a) Dimostrare che $L^p(\mathbf{R}) \otimes L^p(\mathbf{R})$ è contenuto in $L^p(\mathbf{R}^2)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.

- b) Dimostrare che lo span di $L^p(\mathbf{R}) \otimes L^p(\mathbf{R})$ è denso in $L^p(\mathbf{R}^2)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.

$\circ$ ESERCIZIO n.11 a- Sia f sommabile, su un insieme non nullo di misura finita, e a valori in un convesso A aperto di $\mathbf{R}^d$ allora la sua media è in A.[Lo si provi per semispazi aperti].
b- Si provi la diseguaglianza di Jensen.

ESERCIZIO n. 12 a- Si trovi una funzione a valori reali che sta in ogni L^p, $0 < p < \infty$, ma non sta in L^∞.
b- Si trovi una funzione che sta in L^1 ma non sta in alcun L^p con $0 < p \neq 1$.

ESERCIZIO n. 13 a- L'insieme $\{f \in L^p : f \geq 0 \ \text{ q.o.}\}$ è chiuso in L^p?
b- L'insieme $\{f \in L^p(\mathbf{R}) : f(x^2) \in L^p\}$ è chiuso in L^p?
c- L'insieme delle funzioni di L^1 con derivata continua e limitata sono un chiuso di L^1?

$\frown$ ESERCIZIO n. 14 a- Se E è misurabile con misura finita e $0 < r \leq p \leq \infty$ allora vi è $K > 0$ per ogni $f \in L^p(E)$

$$\|f\|_r \ \leq \ K\|f\|_p$$

In particolare $L^P(E) \subset L^r(E)$ se $0 < r \leq p \leq \infty$ e $m(E) < \infty$.
b- Si provi nelle ipotesi precedenti che se f_n converge a zero in $L^p(E)$ allora converge a zero in $L^r(E)$.
c- Si provi che se $p > r$ l'inclusione è stretta.
d- Si mostri che se $m(E) = \infty$ e $p > r$ non si ha mai l'inclusione.

$\circ$ $\frown$ ESERCIZIO n. 15 a- Si considerino gli insiemi l^p , $p \geq 1$, di successioni reali $x = (x_n)$ per cui $\sum |x_n|^p < \infty$. Identificandole con funzioni costanti a tratti si provi che sono rispettivamente sottospazi completi di $L^p(\mathbf{R})$.
b- Si provi quindi che $l^p \subset l^r$, per $p > r$ e con inclusione stretta.

ESERCIZIO n.16 a- Se f è misurabile su M di misura finita allora $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ [Si consideri prima il caso in cui $\|f\|_p < \infty$].
b- Sia M misurabile qualsiasi, se per qualche $s > 0$ si ha $f \in L^s(M)$, allora in M $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
c- Se M ha misura 1 e per qualche $s > 0$ si ha $f \in L^s(M)$ allora in M $\lim_{p\to 0} \|f\|_p = \exp\left(\int_M \log|f|dm\right)$.

ESERCIZIO n. 17 a- Se $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s}$ con $p,\ r,\ s \geq 1$ allora $\qquad \|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_s$
Quando vale l'eguaglianza?
b- Sia $r \in [p; s]$, $\ 1 \leq p \leq s \leq +\infty$ allora $\qquad \|f\|_r \leq \|f\|_p^t\|f\|_s^{1-t} \ , \quad \frac{1}{r} = \frac{t}{p} + \frac{1-t}{s}$

c-
$$a_1 \dots a_n \ \leq \ \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{p_i} \quad , \qquad \sum \frac{1}{p_i} = 1 \quad , \quad a_i \geq 0$$

Quando vale l'eguaglianza ?
d- Se $\ \sum \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$, $p_1 \dots p_n, r \geq 1$ $\qquad$ allora $\qquad \|f_1 \dots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_n\|_{p_n}$
Quando vale l'eguaglianza?

ESERCIZIO n. 18 a- (Lemma di Weyl) Se $f_n \to f$ in L^1 allora vi è una sottosuccessione g_n e vi è $g \in L^1$ per cui

$$|g_n| \leq g \text{ q.o. } \ g_n \to f \ \text{ q.o. e } \ L^1$$

b- Se $0 < p < \infty$, $f \in L^p$, S denso in L^p allora esistono $f_n \in S$, esiste $\psi \in L^1$ per cui

$$|f_n| \leq \psi \quad \text{q.o.} \quad f_n \to f \ \text{ q.o.} \quad \text{e } \ L^p$$