

Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

IIIbis foglio di esercizi: primi esercizi sulla convoluzione tra funzioni

Legenda: ● esercizi impegnativi, ○ di approfondimento e più teorici, ◊ esercizi ‘ponte’.

Legenda per i temi di esame: AACnEm ovvero AAExnEm, AA sono le ultime cifre dell’anno accademico, C per prove in itinere (compitini), Ex per test di appelli, n il numero del compitino o dell’appello, E sta per esercizio ed m il numero dell’esercizio.

ESERCIZIO n.1 a- Se $\tau_a(f)(x) = f(x - a)$ è l’operatore lineare di traslazione definito sulle funzioni continue a supporto compatto si mostri che può essere esteso con continuità a tutto L^p a valori in L^p , $p < \infty$.

b- Si esprima come convoluzione $\tau_{a+b}(f * g)$.

c- Si esprima in modo analogo $\delta_c(f * g)$ ove $\delta_c f(x) = f(\frac{x}{c})$.

ESERCIZIO n.2 a- Si calcoli il prodotto di convoluzione $\chi_{[a;b]} * \chi_{[c;d]}$.

b- Si calcoli il prodotto di convoluzione $\chi_{B(c,r)} * \chi_{B(C,R)}$, essendo $B(a, \rho)$ la palla di centro $a \in \mathbf{R}^n$ e raggio ρ .

ESERCIZIO n.3 Se $g \in L^2 \cap C^1$ e $g' \in L^2 \cap C$ allora $g * g$ è C^2 con derivate uniformemente continue limitate ed infinitesime.

ESERCIZIO n.4 a- Se $f \in L^\infty$ allora $f * \chi_{[a;b]}$ è Lipschitziana.

b- Se $f \in C^k$ allora $f * \chi_{[a;b]}$ è C^{k+1} .

c- Si provino analoghi risultati per $f * \chi_{B(c,r)}$.

ESERCIZIO n.5 a- Se A è misurabile di misura finita allora per ogni B misurabile $x \rightarrow m((A + x) \setminus B)$ è continua.

b- Se A e B sono misurabili di misura finita allora $x \rightarrow m((A + x) \Delta B)$ è continua.

c- Se E è misurabile di misura finita non nulla allora $E - E = \{x : \exists e \in E, e' \in E \ x = e - e'\}$ è un intorno di 0.

[Si usi il prodotto di convoluzione di caratteristiche, Cfr. anche I foglio Es. 10a-c.]

● ESERCIZIO n. 6 a- Trovare E, F misurabili di misura finita per cui $\chi_E * \chi_F$ non sia Lipschitziana.

b- Trovare f continua sommabile per cui $f * f$ non sia continua.
