Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

VII foglio di esercizi: coefficienti di Fourier.

Testi da cui si è preso spunto: H.Dym H.P.Mc Kean "Fourier series and integrals":Ch. 1. A.A.Kirillov A.D.Gvisiani "Teoremi e problemi dell'analisi funzionale":es. 645-650, 652, 653. A.Zygmund K.L. Wheeden "Measureand Integral" Ch. 12.1-12.3; M.Reed B. Simon "Methods of modern Mathematical Physics,, Vol 1 cap. 1, 2;

Legenda: $\bullet$ esercizi più impegnativi, $\circ$ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, $\frown$ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

$\frown$ ESERCIZIO n. 1 Si trovino le relazioni tra i coefficienti di Fourier complessi rispetto al sistema ortogonale e^{ikx}, $k \in \mathbf{Z}$, e quelli trigonometrci rispetto al sistema 1, $\cos kx$, $\sin kx$, $k \in \mathbf{N}$ [Si parta dalle somme $\sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx}$].

$\frown$ ESERCIZIO n. 2 (cfr. 09Ex4E3, 12C1E2)
a- Caratterizzare le funzioni (2π-periodiche) a valori reali in termini dei loro coefficienti di Fourier complessi e quindi in termini dei coefficienti trigonometrici.
b- Caratterizzare in termini dei coefficienti di Fourier complessi e quindi in termini di quelli trigonometrici le funzioni per cui $f(x+\pi) = -f(x)$.
c- Caratterizzare in termini dei coefficienti di Fourier complessi e quindi in termini di quelli trigonometrici le funzioni per cui $f(-x) = -f(x)$.
d- Caratterizzare in termini dei coefficienti di Fourier complessi e quindi in termini di quelli trigonometrici le funzioni per cui $f(-x) = f(x)$.
e- Caratterizzare in termini dei coefficienti di Fourier complessi e quindi in termini di quelli trigonometrici le funzioni per cui $f(-x) = \pm f(x)$, e $f(x+\pi) = -f(x)$.
f- Caratterizzare in termini dei coefficienti di Fourier complessi e quindi in termini di quelli trigonometrici le funzioni per cui $f(x+\pi) = f(x)$.

09C1E2 Dimostrare che una funzione su $\mathbf{R}$ continua, 2π-periodica e *a valori reali* è univocamente determinata dai coefficienti di Fourier complessi con indice $n \geq 0$.

$\frown$ ESERCIZIO n. 3 (cfr. 09 Ex5E1) Data f in $L^2(-\pi;\pi)$ estesa per periodicità ad $\mathbf{R}$ si calcolino i coefficienti di Fourier complessi e trigonometrici, e le relative serie, di $x \mapsto f(x+h)$ e $x \mapsto f(kx)$, $k \in \mathbf{Z}$.

ESERCIZIO n. 4 Si calcolino i coefficienti di Fourier complessi e reali di:
a- $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $0 < x < 2\pi$
b- $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$
c- $f(x) = x$, $0 < x < 2\pi$,
d- $f(x) = \chi_{[-h,h]}(x)$, $-\pi < x < \pi$ per $|h| < \pi$.
e- $f(x) = (\cos x)^2$,
f-11Ex4E2 $f(x) = (\sin x \cos x)^2$.
g- $f(x) = P(\sin x, \cos x)$, con $P(u,v)$ polinomio.

09Ex1E1 Sia g la funzione su $\mathbf{R}$ di periodo 2π definita da $g(x) := e^{-|x|}$ per $x \in [-\pi, \pi]$. Calcolare i coefficienti di Fourier reali e complessi di g.

$\frown$ ESERCIZIO n. 5 a- Si calcolino le serie di Fourier complessa e reale del prolungamento per 2π-periodicità di $f(x) = \chi_{[0,c]}(x)$, per $0 < c < 2\pi$.
b- Lo stesso pel prolungamento 2π-periodico di $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, $|x - \frac{a+b}{2}| < \pi$ per $b - a < 2\pi$.

ESERCIZIO n.6 a- Calcolare $\sum \frac{1}{k^2}$ dalla norma L^2 al quadrato della funzione x, $-\pi < x < \pi$.
b- Si calcoli la serie di Fourier della funzione x^2, $-\pi \leq x \leq \pi$.
c- Si calcoli il valore della serie $\sum \frac{1}{k^4}$. d- Si calcoli il valore della serie $\sum \frac{1}{k^6}$.

$\frown$ ESERCIZIO n.7 Sia f una funzione T-periodica e sommabile sul periodo. Si trovino i suoi coefficienti di Fourier rispetto al sistema ortogonale $e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$, $n \in \mathbf{Z}$, e quindi i relativi coefficienti trigonometrici.

• 11Ex5E5 Per ogni $k = 0, 1, 2, \ldots$, sia $g_k(x) := (x^2 - \pi^2)^k$
e siano $(c_{k,n})_{n\in\mathbf{Z}}$ i coefficienti di Fourier complessi della restrizione di g_k a $[-\pi, \pi]$.

a) Calcolare $c_{0,n}$ e $c_{1,n}$.

b) Scrivere $\ddot{g}_k$ come combinazione lineare di g_{k-1} e g_{k-2} e derivarne una formula ricorsiva che esprime $c_{k,n}$ in termini di $c_{k-1,n}$ e $c_{k-2,n}$ (per $n \neq 0$).

c) Cosa si può dire sul comportamento asintotico di $c_{k,n}$ per $|n| \to \infty$?

$\frown$ ESERCIZIO n.8 Sia $k \geq 1$ ed $f \in C^k_{per}$ detta $S_n(x)$ la somma parziale della serie di Fourier di f si ha

$$|S_N - f|_{L^\infty} \;\leq\; \frac{C}{N^{k-\frac{1}{2}}}$$

$\frown$ $\circ$ ESERCIZIO n.9 (Riemann-Lebesgue) a- Si provi che se f è $L^2(0, 2\pi)$ allora i suoi coefficienti di Fourier sono una successione infinitesima.
b- Si provi che se f è $L^1(0, 2\pi)$ allora i suoi coefficienti di Fourier sono una successione infinitesima[Ci si riduca al caso non negativo e quindi si approssimi f con le sue troncate].
c- Se φ_n , $n \in \mathbf{N}$ è un sistema ortonormale in $L^2(0, 1)$ e limitato in $L^p(0, 1)$, $p > 2$ allora per ogni $g \in L^q$, $q = \frac{p}{p-1}$ si ha $\int g\varphi_n \to 0$.
$\frac{\bullet}{2}$ d- (Stime uniformi per Riemann-Lebesgue) Se f 2π-periodica è L^1 sul periodo si provi:

$$|c_k(f)| \;\leq\; \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x + \frac{\pi}{k})|dx.$$

Si deduca che i coefficienti sono infinitesimi per $k \to \infty$.
e- Se $\sup_\lambda \int |f_\lambda(x + h) - f_\lambda(x)|dx \to 0, \quad h \to 0$ allora $\sup_\lambda |c_k(f_\lambda)| \to 0, \quad k \to \infty$.

ESERCIZIO n.10 a- Si provi che i coefficienti di Fourier di una funzione Hölderiana di esponente $\alpha \in]0, 1[$ sono $O(k^{-\alpha})$.
b- Si provi che se $f(x) = \int^x g(t)dt$ con $g \in L^2$ e a media nulla sul periodo, allora i coefficienti di Fourier di f sono una successione di l^1
c- Si provi che se f è 2π periodica e Lipschitziana allora i suoi coefficienti di Fourier formano una successione l^1.

09Ex3E1 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua e 2π-periodica. Dimostrare che f è di classe C^∞ se e solo se i coefficienti di Fourier c_n soddisfano $c_n = o(|n|^{-a})$ per ogni $a \geq 0$.

• 12Ex4E5 Indichiamo con L^1_{per} lo spazio delle funzioni 2π-periodiche da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ la cui restrizione all'intervallo $[-\pi; \pi]$ è sommabile. Date $f,\ g \in L^1_{\text{per}}$ si definisce il prodotto di convoluzione $f * g \in L^1_{\text{per}}$ ponendo

$$f * g(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y) g(y) dy$$

a) Calcolare i coecienti di Fourier complessi di $f * g$ in funzione di quelli di f e g.
b) Determinare l'insieme delle funzioni $f \in L^1_{\text{per}}$ tali che $f * f = f$.

$\circ$ ESERCIZIO n. 11 a- Una funzione f si dice a *variazione limitata puntualmente* su un intervallo $[a; b]$ se

$$V_f([a, b]) =: \sup\{\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : x_0 = a < x_1 \dots x_m = b\} \ < +\infty$$

Si mostri che le funzioni a variazione limitata puntuale sono tutte e sole le differenze di due funzioni crescenti e limitate.
b- Se $f \in C^1([a; b])$ allora $V_f([a; b]) = \int_a^b |f'(x)| dx$.
c- Se f è a variazione limitata su $[a; b]$ allora vi è una costante C tale che per ogni $g \in C^1([a; b])$ si ha si ha:

$$\left| \int_{[a;b]} f(x) g'(x) dx \right| \ \leq \ C \max_{[a;b]} |g|$$

d- Si stimino i coefficienti di Fourier di una funzione 2π-periodica e a variazione limitata sul periodo .

$\frown$ $\circ$ ESERCIZIO n. 12 a- Se f è 2π periodica con f' continua su $\mathbf{R}$ si trovino le relazioni tra i coefficienti di Fourier complessi e trigonometrci della funzione e della derivata.
b- Se $g \in L^1(-\pi, \pi)$ si definisca $f(x) = \int_{-\pi}^x g(t) dt,\ x \in [-\pi; \pi]$. Si trovino le relazioni tra i coefficienti di Fourier complessi e trigonometrici delle due funzioni.
Se poi g è a media nulla su $[-\pi; \pi]$, prolungando g per 2π-periodicità si provi che fè 2π-periodica e si semplifichi la relazione tra i coefficienti [e.g. f definita su $[-\pi; \pi]$ con derivata continua nell'intervallo].
c- Si provi che se inoltre $g \in L^2(-\pi; \pi)$ allora i coefficienti di Fourier di g sono una successione a quadrato sommabile e la serie di Fourier di f converge totalmente in norma uniforme ad f.
d- Viceversa se $f \in L^2(-\pi, \pi)$ estesa con periodicità e $\sum_n c_n(f) \cdot in \cdot e^{inx} =: g$ converge in $L^2(-\pi, \pi)$ allora $f \in C(\mathbf{R}),\ f(x) - f(-\pi) = \int_{-\pi}^x g(t) dt$
e- Per $k \geq 1$ e $f \in L^2(-\pi, \pi)$ estesa con periodicità si ha: $\sum_n |c_n(f)|^2 \cdot n^{2k} < +\infty$ se e solo se $f \in C^{k-1}_{per}(\mathbf{R})$ e $f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(-\pi) = \int_{-\pi}^x g(t) dt$ per $g \in L^2$ a media nulla .

• ESERCIZIO n.13(traccia di F.Ricci) a- Sia f una funzione 2π-periodica ed α-Hölderiana con $\alpha > \frac{1}{2}$. Si provi usando gli incrementi di f e l'identità di Parseval che

$$\sum_n |c_n(f)|^2 (\sin nh)^2 \le A|h|^{2\alpha}$$

b- Con $h = \frac{\pi}{4N}$ si mostri che $\displaystyle\sum_{N\le|n|\le 2N} |c_n|^2 \ \le B \sum_{N\le|n|\le 2N} |c_n|^2 (\sin \frac{n}{N}\frac{\pi}{4})^2$

c- Si provi $\displaystyle\sum_{N\le|n|<2N} |c_n| \ \le CN^{\frac{1}{2}-\alpha}$

d- Si deduca la convergenza della serie dei coefficienti scegliendo $N = 2^M$.

NOTA: nei prossimi due esercizi si mostra come a partire dalle serie i Fourier si arriva ai risulati ottenibili grazie all'analisi delle autofunzioni di certi operatori autoaggiunti come accennato trattando del metodo di separazione delle variabili.

$\frown$ ∘ ESERCIZIO n.14 a- Prolungando per disparità a tutto $[-\pi, \pi]$ una funzione f definita e sommabile su $[0, \pi]$ si trovi la sua serie di seni $\sum_{k\ge 1} b_k \sin kx$.
b- Prolungando per parità a $[-\pi, \pi]$ una funzione f definita e sommabile su $[0, \pi]$ si trovi la sua serie di coseni $a_0 + \sum_{k\ge 1} a_k \cos kx$.
c- Si provi che $\sin kx$, $k \ge 1$ e $\cos kx$, $k \ge 1$ sono due sistemi ortogonali completi in $L^2(0; \pi)$.
d- Se $f(x) = \int_0^x g(t)dt$, con $g \in L^2(0; \pi)$ a media nulla, la serie dei seni converge uniformemente ad f (in particolare se $f \in C^1[0; \pi]$ è nulla agli estremi).
e- Se $f(x) = \int_0^x g(t)dt$, con $g \in L^2(0; \pi)$, la serie dei coseni converge uniformemente ad f. Se $f \in C^2[0; \pi]$ la serie dei seni della derivata converge uniformemente? Quale condizione è necessaria e sufficiente per questa convergenza? Se $f \in C^3[0; \pi]$ la serie dei coseni della derivata seconda converge uniformemente?
f- Sia f in $C^2([0; \pi])$ e nulla agli estremi. Integrando per parti si trovi la relazione tra i coefficienti dello sviluppo in seni della derivata seconda e quelli della funzione. La serie in coseni della derivata prima converge uniformemente? Se $f \in C^3[0; \pi]$ la serie in seni della derivata seconda converge uniformemente?

$\frown$ ESERCIZIO n. 15 a- Data $f \in L^1(0; \pi)$ si consideri il prolungamento g per disparità a $[-2\pi; 2\pi]$ del suo prolungamento h a $[0; 2\pi]$ per simmetria rispetto a $x = \pi$.
A quale sistema ortogonale completo φ_n, $n \in \mathbf{N}$, di $L^2(0; \pi)$ si dà origine scrivendo i coefficienti di Fourier di g in termini di f?
b- Se $f \in C^1[0; \pi]$ quando lo sviluppo rispetto a tale sistema converge uniformemente? Se $f \in C^2[0; \pi]$ si caratterizzi la convergenza rispetto alla norma-$C^1[0; \pi]$ dello sviluppo in questione.
