

Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

XIII foglio di esercizi: trasformata di Fourier in L^2 .

Legenda: • esercizi più impegnativi, ◦ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, ◊ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di test di appelli, n il numero del compitino o dell'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

12Ex3E4 Dire per quali p la funzione $f(x) := x/(1+x^2)$ appartiene a $L^p(\mathbf{R})$ e calcolare la trasformata di Fourier di f , giustificando per quanto possibile la risposta.

ESERCIZIO n.1 Se $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ e $\widehat{f} \in L^2(\mathbf{R}^d)$ allora $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$

11C1E8 Sia f una funzione in $C^1(\mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R})$ tale che $f' \in L^2$.

a) Dimostrare che anche in questo caso vale la formula $\widehat{f}' = iy\widehat{f}$. [Suggerimento: regolarizzare f per convoluzione].

b) Dimostrare che \widehat{f} appartiene a L^1 .

ESERCIZIO n.2 a- Sia $f \in L^2$, per cui $xf \in L^2$. Si provi che per ogni $\varphi \in C_c^\infty$ (funzioni test a supporto compatto) si ha

$$\int \varphi(y)ix\widehat{f}(y)dy = - \int \varphi'(y)\widehat{f}(y)dy$$

b- Si calcoli la trasformata di Fourier di $\frac{x}{1+x^2}$.

11Ex2E8 Sia H lo spazio di Hilbert complesso $L^2(\mathbf{R})$, e sia $F : H \rightarrow H$ la trasformata di Fourier.

a) Calcolare F^4 e l'aggiunta F^* .

b) Calcolare gli autovalori di F .

◊ ◦ ESERCIZIO n.3 • a) Si definiscono $L^1 + L^2 := \{f : f = f_1 + f_2, f_1 \in L^1(\mathbf{R}), f_2 \in L^2(\mathbf{R})\}$, $|f|_+ := \inf |f_1|_1 + |f_2|_2$. Si provi che $(L^1 + L^2, | \cdot |_+)$ è uno spazio di Banach.

b) Per quali p si ha $L^p \subseteq L^1 + L^2$?

• c) Se $g \in L^p$, $p > 2$ come si potrebbe definire la trasformata di Fourier di g ?
