**Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica**

Alberti, Tortorelli

XIV foglio di esercizi: prime applicazioni della trasformata di Fourier

---

Legenda: $\bullet$ esercizi più impegnativi, $\circ$ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, $\frown$ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

---

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

---

09Ex4E4 Trovare una soluzione $u : [0, +\infty) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dell'equazione $u_{tt} = 4u_{xx}$ che soddisfi le condizioni iniziali $u(0, x) = 2/(1 + x^4)$ e $u_t(0, x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

---

ESERCIZIO 1 Discutere l'unicità della soluzione di 09Ex4E4 nell'ambito delle funzioni $C^2([0, +\infty) \times \mathbf{R})$.
[Suggerimento: si consideri il problema relativo all'equazione $(1, -2) \cdot \nabla v(t, x) = 0$ ].

---

ESERCIZIO 2 Trovare una soluzione $u : [0, +\infty) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dell'equazione $u_t = 4u_{xx}$ che soddisfi le condizioni iniziali $u(0, x) = 2/(1 + x^4)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

---

NOTA: il problema con dato iniziale nullo per il calore non ha unicità in $C^\infty([0; \infty[\times \mathbf{R})$:

$$u(t,x) \ =\ll \left[\cosh x\sqrt{\frac{d}{dt}}\right] \psi(t) \gg =: \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}\frac{d^m\psi}{dt^m}(t) \quad , \qquad \psi(t) =: e^{-\frac{1}{t^2}},\ \psi(0) = 0$$

In particolare il problema non ha unica soluzione regolare.

---

12Ex1E7 Usando la trasformata di Fourier trovare una soluzione $u$ del problema

$$\begin{cases} u_t = 2tu + u_{xx} & \text{in } [0, +\infty) \times \mathbf{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{in } \mathbf{R} \end{cases}$$

dove $u_0$ è l'indicatrice dell'intervallo $[-1, 1]$, e scriverla in termini di una primitiva della funzione $\exp(-x^2)$. Dimostrare che $u$ è di classe $C^\infty$ per $t > 0$ ed è continua in ogni punto $(0, x)$ con $x \neq \pm 1$; calcolare il limite di $u(t, \pm 1)$ per $t \to 0$.

---

12Ex2E6 a) Sia $f$ una funzione in $L^1(\mathbf{R})$ tale che $f$ ha supporto compatto e $\int_{\mathbf{R}} f(x)\, x^n\, dx = 0$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$ Dimostrare che allora $f = 0$ quasi ovunque.

b) Supponiamo ora che $f$ sia una funzione in $L^1(\mathbf{R})$ tale che $f(x)\, x^n \in L^1(\mathbf{R})$ e $\int_{\mathbf{R}} f(x)\, x^n\, dx = 0$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$ Far vedere che in questo caso non è detto che $f$ sia nulla quasi ovunque.
[Suggerimento: usare la trasformata di Fourier.]