Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

XVII foglio di esercizi: prodotto esterno

Legenda: • esercizi più impegnativi, ∘ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, ⌒ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

ESERCIZIO 1 a) Si dimostri direttamente dalla definizione che esiste un'unica applicazione n-lineare alternante Λ in $\mathbf{R^n}$ per cui per cui $\Lambda(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)=1$, ove $(\mathbf{e}_i)_{1\le i\le n}$ è la base usuale di $\mathbf{R^n}$. [È il determinante della matrice di colonne gli n vettori dati].
b) Si deduca da tale unicità che il determinante del prodotto di due matrici $n\times n$ è il prodotto dei determinanti.
c) Si provi direttamente che per ogni applicazione n-lineare alternante φ in $\mathbf{R^n}$, se $w_i^j=v_j^i$

$$\varphi(v^1,\dots,v^n)=\varphi(w^1,\dots,w^n)$$

ESERCIZIO 2 a) Sia φ applicazione k-lineare alternante in $\mathbf{R^n}$ si deduca direttamente che

$$\varphi(v^1,\dots,v^k)=\sum_{1\le i_1,\dots,i_k\le n} v^1_{i_1}\dots v^k_{i_k}\varphi(\mathbf{e}_{i_1},\dots,\mathbf{e}_{i_k})=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\varphi(\mathbf{e}_{i_1},\dots,\mathbf{e}_{i_k})\det\left(v^j_{i_h}\right)_{\substack{1\le j\le k\\1\le h\le k}}$$

b) Dato quindi il k-parellepipedo $t_1v^1+\dots t_kv^k$, $0\le t_1,\dots t_k\le 1$, cosa rappresentano geometricamente i numeri $\det\left(v^j_{i_h}\right)_{\substack{1\le j\le k\\1\le h\le k}}$ al variare di $i:k\nearrow n$?

ESERCIZIO 3 a) Data M matrice $n\times k$, provare che l'applicazione
$\Gamma(X^1,\dots,X^k)=\det {}^tM(X^1\dots X^k)$ è k-lineare alternante in $\mathbf{R^n}$.
b) Si calcoli $\Gamma(X^1,\dots,X^k)$ in termini dei minori $k\times k$ della matrice $(X^1\dots X^k)$.
c) Si provi la formula di Cauchy-Crofton-Binet:
somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine k di M = determinante di ${}^tMM$
d) Si dia un'interpretazione geometrica di tale formula. [Teorema di Pitagora generalizzato].

ESERCIZIO 4 Calcolare $(3\mathbf{e}^*{}_1+2\mathbf{e}^*{}_2+\mathbf{e}^*{}_3)\wedge(\mathbf{e}^*{}_1-2\mathbf{e}^*{}_3)\wedge(\mathbf{e}^*{}_2+\mathbf{e}^*{}_3)$

ESERCIZIO 5 Date $\varphi_1,\dots\varphi_k$ funzioni lineari da $\mathbf{R^n}$ in $\mathbf{R}$ si mostri che

$$(\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_k)(v^1,\dots,v^k)=\det\left(\varphi_i(v^j)\right)$$

ESERCIZIO 6 Data l'applicazione 2-lineare alternate in $\mathbf{R^{2n}}$ $\omega=\mathbf{e}^*{}_{1,2}+\dots+\mathbf{e}^*{}_{2n-1,2n}$ calcolare $\omega^{\wedge n}=:\omega\wedge\dots\wedge\omega$ ripetuto n volte.

09Ex2E3 Sia φ un'applicazione k-lineare alternante su $\mathbf{R^n}$.

a) Se k dispari provare che $\varphi\wedge\varphi=0$. b) Se k è pari?

12C2E3 a) L'applicazione 2-lineare alternante $\mathbf{e}^*{}_{1,2} + \mathbf{e}^*{}_{2,3} + \mathbf{e}^*{}_{1,3}$ è semplice? Nel caso la si scriva come prodotto esterno di due funzionali lineari.
b) L'applicazione 2-lineare alternante $\mathbf{e}^*{}_{1,2} + \mathbf{e}^*{}_{3,4}$ è semplice? Nel caso la si scriva come prodotto esterno di due funzionali lineari.

11C2E4 Dato $a = (a_1, \dots, a_n)$ vettore non nullo in $\mathbf{R^n}$, definiamo λ funzionale lineare in $\mathbf{R^n}$ e ω applicazione $n-1$-lineare alternante in $\mathbf{R^n}$:

$$\lambda := \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbf{e}^*{}_i \quad \text{e} \quad \omega := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i \, \omega_i \text{ dove } \omega_i := \bigwedge_{j \neq i} \mathbf{e}^*_{\mathbf{j}} \,.$$

a) Calcolare $\lambda \wedge \omega$.
b) Calcolare $\langle \omega; f^1, \dots, f^{n-1} \rangle$ dove $(f^1, \dots, f^{n-1})$ è una base ortonormale di $a^\perp$.

• 11C2E8 Sia X uno spazio vettoriale (reale) di dimensione n, e sia ω un'applicazione k-lineare alternante su X con $k > 1$. Per ogni $x \in X$, indichiamo con ω_x l'applicazione $k-1$-lineare alternante definita da

$$\langle \omega_x; x^1, \dots, x^{k-1} \rangle := \langle \omega; x, x^1, \dots, x^{k-1} \rangle \qquad x^1, \dots, x^{k-1} \in X$$

e con V il sottospazio di tutti gli $x \in X$ tali che $\omega_x \equiv 0$.

a) Dimostrare che se $\dim V > n - k$ allora $\omega \equiv 0$.
b) Dimostrare che se ω si scrive come prodotto esterno di k funzionali lineari da X in $\mathbf{R}$ allora $\dim V \geq n - k$.
c) Calcolare V nel caso in cui $X := \mathbf{R^4}$ e $\omega := \mathbf{e}^*{}_1 \wedge \mathbf{e}^*{}_2 + \mathbf{e}^*{}_3 \wedge \mathbf{e}^*{}_4$, e dimostrare che ω non può essere scritta come prodotto esterno di 2 applicazioni lineari.

ESERCIZIO 7 In riferimento al precedente esercizio 11C2E8 cosa si può dire di ω se $\dim V = n - k$?

11Ex3E4 a) Sia $\omega \in \wedge^k(\mathbf{R^n})$ e siano $v_1, \dots, v_k$ vettori linearmente *dipendenti* in $\mathbf{R^n}$. Dimostrare che $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$.
b) Dimostrare che se $T : \mathbf{R^m} \to \mathbf{R^n}$ è un'applicazione lineare con rango strettamente minore di k allora $T^\# \omega = 0$.

ESERCIZIO 8 Se $T : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$ è un'applicazione lineare dare un'interpretazione geometrica a $|\langle T^\sharp \ \mathbf{e}^*{}_{i_1, \dots, i_k}; v^1, \dots v^k \rangle|$.