Analisi III, Anno Accademico 2013 -2014, Matematica

Alberti, Tortorelli

IXX foglio di esercizi: integrazione orientata

Legenda: $\bullet$ esercizi più impegnativi, $\circ$ di approfondimento o estensione e quelli più teorici, $\frown$ quelli 'ponte' verso argomenti sviluppati in altra sede o con una certa rilevanza pratica.

Legenda: Si mette in evidenza quando gli esercizi sono stati temi di esame con la seguente convenzione: AACnEm ovvero AAExnEm, ove AA sono le ultime cifre dell'anno accademico, C se si tratta di prove in itinere (compitini), Ex se si tratta di testi di appelli, n il numero del compitino o del'appello, E sta per esercizio ed m il numero dell'esercizio. Le soluzioni sono reperibili nella pagina personale di G. Alberti.

$\bullet$ 09C2E7 Sia $D := \{t \in \mathbf{R^2} : |\mathbf{t}| \leq \mathbf{1}\}$ e sia $S := \varphi(D)$ dove $\varphi : D \to \mathbf{R^3}$ è la mappa data da

$$\varphi(t_1, t_2) := (t_1 + t_1^3\,,\, t_2 + t_2^3\,,\, (1 + t_1)(1 + t_2)) \;.$$

Sia inoltre ω la 2-forma su $\mathbf{R^3}$ data da

$$\omega := (dx_1 - dx_2) \wedge dx_3 \;.$$

a) Verificare che φ è iniettiva e $d\varphi(t)$ ha rango massimo in tutti i punti di D. [Osservazione: Si noti che questo è sufficiente a dimostrare che S è una superficie con bordo di dimensione 2 in $\mathbf{R^2}$].
b) Supponendo che S sia dotata dell'orientazione indotta da φ, calcolare $\int_S \omega$.

09Ex2E4 Sia ω una 2-forma su $\mathbf{R^3}$ del tipo $\omega := g\, dx_1 \wedge dx_2$ con $g : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ funzione di classe C^1 che dipende solo da x_1 e x_2.
a) Verificare che $d\omega = 0$ e scrivere esplicitamente una primitiva di ω.
b) Dimostrare che $\int_S \omega = 0$ per ogni superficie S orientata, compatta e senza bordo.

$\bullet$ 09Ex3E8Sia S l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbf{R^3}$ tali che $z^2 = x^2 + y^2$ e $1 \leq z \leq 2$, e sia

$$\omega = \left(1 + \frac{y}{x^4 + 1}\right) dx \wedge dy - z(x + y)(dx + dy) \wedge dz \;.$$

a) Verificare che S è una superficie con bordo di classe C^∞.
b) Trovare una parametrizzazione φ di S e calcolare $\varphi^\#\omega$ e $\varphi^\#(d\omega)$.

$\bullet$ 09Ex4E7 Sia S l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbf{R^3}$ tali che $x^2 + y^2 + z^3 - 2z = 4$ e $z \geq 0$, e preso $a \in \mathbf{R}$ si ponga

$$\omega := e^{x^2+y^2} dx \wedge dy - 2z(x + ay)\,(dx + dy) \wedge dz \;,$$

a) Dimostrare che S è una superfice con bordo, compatta e di classe C^∞ in $\mathbf{R^3}$.
b) Determinare l'insieme I degli $a \in \mathbf{R}$ per i quali ω è chiusa, ovvero $d\omega = 0$.
c) Per ogni $a \in I$ trovare una primitiva di ω, vale a dire una 1-forma σ tale che $d\sigma = \omega$.
d) Per ogni $a \in I$ calcolare l'integrale di ω su S supponendo che l'orientazione di S in $(0, 0, 2)$ sia quella indotta dal vettore normale $(0, 0, 1)$.

11C2E3 Sia ω una k-forma di classe C^1 con differenziale nullo in $\mathbf{R^n}$, e siano S_1 ed S_2 due superfici compatte, orientate e di dimensione k e classe C^1 in $\mathbf{R^n}$ i cui bordi coincidono (come insiemi e come orientazione). Dimostrare che $\int_{S_1} \omega = \int_{S_2} \omega$.

• 11Ex3E8 Dato $d \geq 1$, sia ω una $(d-1)$-forma di classe C^1 su $\mathbf{R^{d+1}}$, e sia $S := g(\mathbf{R^d})$ dove $g : \mathbf{R^d} \to \mathbf{R^{d+1}}$ la mappa data da

$$g(s) := \Big(\frac{s}{1+|s|^2}, |s|^2\Big).$$

a) Dimostrare che S è una superficie di dimensione d e classe C^∞ in $\mathbf{R^{d+1}}$, orientabile, senza bordo e ınon compatta.
b) Dimostrare che, per ogni orientazione su S, se ω ha supporto compatto allora $\int_S d\omega = 0$.
c) Cosa succede se ω non ha supporto compatto?

12C2E2 Nelle ipotesi del teorema di Stokes si richiede, tra le altre cose, che la superficie S sia compatta. Far vedere con un esempio che non basta chiedere che S sia limitata.

12Ex4E6 Sia S l'immagine dell amappa $\Phi : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^4}$

$$\Phi(s,t) \; := \; (\cos(s+t), \;\; \sin(s+t), \;\; \cos(s-t), \;\; \sin(s-t))$$

a) Mostrare che S è una superficie senza bordo orientabile di dimensione 2.
b) Calcolarne l'area.
c) Considerata l'orientazione indotta su S calcolare $\int_S \omega$ con
$\omega := x_1(x_3^2 + x_4^2) dx_1 \wedge dx_2 \; - \; x_3(x_1^2 + x_2^2) dx_3 \wedge dx_4$.

12Ex5E8 Sia S l'insieme dei punti $(x,y,z) \in \mathbf{R^3}$ tali che $x^2 + y^2 + 2z(1+z^2)exp(x^2 - y^2) = 4$ e $z \geq 0$.
a) Dimostrare che S è una superficie con bordo di classe C^∞, compatta, connessa, orientabile.
b) Si orienti S in modo tale che l'orientazione di $Tan(S,p)$, $p = (0,0,1)$, sia data da $[(1,0,0),(01,0)]$ e si calcoli $\int_S \omega$ dove $\omega := dx \wedge dy + e^z y dx \wedge dz + e^z x dy \wedge dz$.
c) Si calcoli $\int_S \omega$ dove $\omega := xe^z dx \wedge dy + y dx \wedge dz + x dy \wedge dz$.

09Ex3E5 Sia A la chiusura di un aperto limitato di $\mathbf{R^n}$ con frontiera regolare, e sia ν la normale esterna a ∂A. Sia inoltre $u : (0,T) \times A \to \mathbf{R}$ una funzione di classe C^2 tale che

$$u_t = \Delta u \quad (0,T) \times A.$$

Dimostrare i seguenti enunciati:
a) se $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $(0,T) \times \partial A$ allora $\int_A u \, dx$ è costante in t;
b) se $u = 0$ su $(0,T) \times \partial A$ allora $\int_A u^2 \, dx$ è decrescente in t.

12Ex1E3 a) Sia D un dominio compatto di $\mathbf{R^n}$ con bordo di classe C^1 (cioè D è una superficie con bordo di dimensione n in $\mathbf{R^n}$). Dimostrare che dati un campo di vettori F ed una funzione f definiti su D, entrambi di classe C^1, si ha

$$\int_{\partial D} f \, F \cdot \eta \, d\sigma_{n-1} = \int_D f \,\mathrm{div}\; F + \nabla f \cdot F \, dx\,.$$

b) Sia X il sottospazio di $L^2(D)$ formato dalle funzioni di classe C^2 su D che si annullano su ∂D. Dimostrare che l'operatore di Laplace $\Delta : X \to L^2$ è autoaggiunto.