Esercitazioni di Matematica e Statistica, Anno Accademico 2008-2009,
Scienze Biologiche e Molecolari C
V.M.Tortorelli

schema XIII esercitazione, 17 Febbraio 2009

Risonanza, battimenti e i primi esercizi di probabilità come quoziente tra casi favorevoli e casi possibili

Oscillatore: risonanza e battimenti:

1 - Molti fenomeni vengono descritti con buona approssimazione da equazioni differenziali: modello di Lotka-Volterra di crescita in presenza di risorse limitate, sistema preda-predatore o di simbiosi o di competizione *riducibile per derivazione e due sostituzioni* ad una equazione differenziale lineare del secondo ordine.

2- Il fenomeno base modellato da un'equazione lineare del secondo ordine è quello di un moto unidimensionale ottenuto da una forza F dipendente da tempo, e posizione, velocità attuali, descritto secondo la legge di Newton: massa per accellerazione = forza:

m massa del corpo
$x(t)$ posizione al variare del tempo
$x'(t)$ velocità al variare del tempo
$x''(t)$ velocità al variare del tempo

si ottiene l'equazione differenziale
$mx''(t) = F(t, x(t), x'(t))$

3- Un caso particolare di grande interesse è quello *lineare* in cui $F(t,p,v) = g(t) - kp - rv$:

si ottiene l'equazione differenziale lineare completa del secondo ordine non omogenea
$mx''(t) = -kx(t) - rx'(t) + g(t)$
se $k > 0$, $r \geq 0$ tale equazione si chiama *"oscillatore smorzato e forzato"*, e si riscrive dividendo i due membri dell'eguaglianza per m

$$x''(t) = -\omega_0^2 x(t) - \rho x'(t) + f(t)$$

il termine $f(t)$ indica una forza "esterna" dipendente solo dal tempo, l'addendo $-\omega_0^2 x(t)$ descrive una forza di "richiamo" dipendente solo dalla posizione, l'addendo $-\rho x'(t)$ una forza di "attrito" dipendente solo dalla velocità.

Il termine forzante può essere sempre approssimato (in senso opportuno) con somme di prodotti di funzione esponenziale per funzione trigonometrica. Per questo hanno particolare rilevanza i termini forzanti del tipo $f(t) = ae^{qt}\cos\omega t + be^{qt}\sin\omega t$

In quanto segue è interessanta avere il coefficiente di attrito ρ abbastanza piccolo.

L'oscillatore smorzato corrisponde all'equazione omogenea
$x''(t) = -\omega_0^2 x(t) - \rho x'(t)$

L'oscillatore semplice è dato nel caso in cui sia la forza esterna è nulla sia la forza di attrito è nulla; l'equazione diventa:

$$x''(t) = -\omega_0^2 x(t)$$

4- Tale equazione ben descrive l'approssimazione lineare, per spostamenti $x(t)$ vicini alla posizione di equilibrio 0, del seguente moto:

$x''(t) = -\omega_0^2 \sin x(t) = \text{Taylor} = -\omega_0^2 x(t) + \omega_0^2 o(x^2(t))$

che corrisponde all'approssimazione per piccole oscillazioni angolari $x(t)$ attorno alla verticale di un pendolo di lunghezza e massa unitarie sotto l'azione della gravità

esso corrisponde anche all'approssimazione del moto lungo una retta di una massa unitaria attaccata ad un estremo di una molla con estermo opposto fisso, ed origine come posizione di quiete, ovvero di un corpo legato ad un elastico fissato nell'origine.

- Le soluzioni dell'omogenea date dalla teoria, essendo le radici dell'equazione algebrica associata immaginarie pure, sono

$\alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$
l'ultima eguaglianza ottenuta scrivendo in coordinate polari $(\beta, \alpha) = (A\cos\varphi, A\sin\varphi)$ ed usando la formula del seno della somma.

Quindi i grafici delle soluzioni dell'omogenea sono tutti dello stesso tipo: quello di un seno centrato in $-\frac{\varphi}{\omega_0}$, "dilatato" in verticale di un fattore A e "compresso" in orizzontale di un fattore $\frac{1}{\omega_0}$.

5- Considerando l'oscillatore smorzato senza termine forzante si ha l'equazione corrispondente ad un moto con attrito dovuto per esempio nel caso del pendolo all'aria e al vincolo etc .:

$x''(t) = -\rho x'(t) - \omega_0^2 x(t)$
se ρ è piccolo da rendere negativo il discriminante dell'equazione algebrica associata, le radici dell'equazione algebrica associata sono $-\frac{\rho}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2/4}$ Le soluzioni dell'omogenea date dalla teoria sono quindi

$e^{-\frac{\rho}{2}t}\alpha \cos t\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2/4} + \beta e^{-\frac{\rho}{2}t} \sin t\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2/4} = e^{-\frac{\rho}{2}t} A \sin(t\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2/4} + \varphi)$
Quindi i grafici delle soluzioni dell'omogenea sono tutti dello stesso tipo: quello di un seno centrato in $-\frac{\varphi}{\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2/4}}$, "dilatato" in verticale di un fattore A e "compresso" in orizzontale di un fattore $\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2/4}}$,
ed infine ulteriormente compresso in verticale tra i grafici di $e^{-\frac{\rho}{2}t}$ e $-e^{-\frac{\rho}{2}t}$.

6- RISONANZA: considerando l'oscillatore sempplice con termine forzante speciale

$x''(t) = -\omega_0^2 x(t) + a\cos\omega t + b \sin \omega t$
essendo l'equazione lineare, data una sua qualsiasi soluzione particolare, ogni altra sua soluzione puó essere espressa come somma di una quella particolare con una ben precisa tra le soluzioni dell'equazione omogenea.

Inoltre una soluzione particolare può essere calcolato con il metodo dei "coefficienti indeterminati". Si presentano due casi:

- $\omega \neq \omega_0$: una soluzione particolare è
$\frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$
(è somma delle due particolari delle equazioni con termini noti separati: per quella con termine noto $a\cos\omega t$ si cerca direttamente, mancando nell'equazione il termine con la derivata prima, una soluzione particolare del tipo $A\cos\omega t$. Analogamente per l'equazione con termine noto $b \sin \omega t$ si cerca direttamente una soluzione dle tipo $B \sin \omega t$.)

- $\omega = \omega_0$, si ha il cosìdetto fenomeno di RISONANZA:
benchè i termini noti siano limitati, le soluzioni dell'omogena siano limitate le soluzioni sono illlimitate con il passare del tempo oscillano sempre di più:
infatti una soluzione particolare è
$-\frac{b}{2\omega_0} t \cos \omega t + \frac{a}{2\omega_0} t \sin \omega t$

(è somma delle due particolari delle equazioni con termini noti separati: per quella con termine noto $a\cos\omega_0 t$ si cerca direttamente, mancando nell'equazione il termine con la derivata prima, una soluzione particolare del tipo $At\sin\omega_0 t$. Analogamente per l'equazione con termine noto $b\sin\omega_0 t$ si cerca direttamente una soluzione del tipo $Bt\cos\omega_0 t$.)

- RISONANZA COME CASO LIMITE per $\omega \to \omega_0$

Per semplicità esaminiamo il caso con termine forzante dato solo da $b\sin\omega t$ $(a = 0)$. Si considera la forma " generale" delle soluzioni avendo a disposizione la soluzione particolare data dalla teoria nel caso di $\omega \neq \omega_0$

$$\frac{b}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t + \alpha\cos\omega_0 t + \beta\sin\omega_0 t$$

in effetti il coefficiente del $sin\omega t$ va all'infinito se ω tende ad ω_0, ma non mette in luce il comportamento in t del limite. Quindi osservando che il denominatore di tale coefficiente ha come fattore infinitesimo $\omega_0 - \omega$ viene in mente di far comparire al numeratore l'incremento del seno, e questo si può fare aggiungendo e togliendo una soluzione dell'omogenea:

$$\frac{b}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t - \frac{b}{\omega_0^2-\omega_0^2}\sin\omega_0 t + \alpha\cos\omega_0 t + \beta\sin\omega_0 t + \frac{b}{\omega_0^2-\omega_0^2}\sin\omega_0 t =$$
$$-\frac{b}{\omega^2-\omega_0^2}[\sin\omega t - \sin\omega_0 t] + \text{soluzione} \quad \text{omogenea}$$

quindi si è trovata un'altra soluzione particolare con cui esprime la forma generale delle soluzioni dell'equazione. Questa ben si presta per passare al limite per $\omega \to \omega_0$ ed ottenere ...

$$-\frac{b}{\omega^2-\omega_0^2}[\sin\omega t - \sin\omega_0 t] = -\frac{b}{\omega+\omega_0} t \frac{\sin\omega t - \sin\omega_0 t}{\omega t - \omega_0 t} \to -\frac{b}{2\omega_0} t\cos\omega_0 t \qquad \left(\frac{\sin y - \sin y_0}{y - y_0} \to \cos y_0\right)$$

... proprio la soluzione particolare del caso risonante!
Limite di alcune soluzioni è soluzione dell'equazione limite: pensando ad un ponte con una sua oscillazione propria il folklore vuole che un reggimento che ci marci sopra con certa frequenza deve rompere il passo per evitare indesiderati crolli.

ESERCIZIO LACIATO: per quali dati iniziali si ottiene la soluzione particolare messa in risalto?

Nel caso dell'oscillatore smorzato e forzato con un termine del tipo $e^{-\frac{\rho}{2}t}\sin t\omega_0$ è possibile un'analisi simile per $\rho \to 0^+$.

7- BATTIMENTI: in svariati esperimenti riguardo segnali od oscillazioni si presenta un andamento di un segnale con frequenza assegnata (frequenza= numero di oscillazioni nell' unitaà di tempo, periodo= tempo di un oscillazione completa, di un "giro completo") ma un 'ampiezza che si modula periodicamente: crescendo, decrescendo e quindi ripetendosi. Come dar conto di questi comportamenti ? Che soluzioni particolari sono da considerare?

L'idea è che un comportamento di questo tipo sia dato da funzioni del tipo $A\sin ut\cos vt$, $A\sin ut\sin vt$, etc. .

A render effettiva questa idea sono: la parità del coseno, la disparità del seno, le formule di addizione del seno insieme all'accortezza di eprimere due numeri come somma e differenza tra la loro media e la loro mezza distanza:

$$\sin U - \sin V = \sin\left(\frac{U+V}{2} + \frac{u-v}{2}\right) - \sin\left(\frac{U+V}{2} - \frac{u-v}{2}\right) =$$
$$= \sin\frac{U+V}{2}\cos\frac{U-V}{2} + \cos\frac{U+V}{2}\sin\frac{U-V}{2} - (\sin\frac{U+V}{2}\cos\frac{V-U}{2} + \cos\frac{U+V}{2}\sin\frac{V-U}{2}) =$$
$$= 2\cos\frac{U+V}{2}\sin\frac{U-V}{2}$$

Si applichi questa identità alla soluzione particolare messa sopra in evidenza ($U = \omega t$, $V = \omega_0 t$), si ottine la desiderata forma della soluzione particolare:

$-\frac{b}{\omega^2-\omega_0^2}[\sin\omega t-\sin\omega_0 t]=-\frac{2b}{\omega^2-\omega_0^2}\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}t\right)=$
$-\frac{2}{\omega-\omega_0}\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right)\cdot\frac{b}{\omega+\omega_0}\cos\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}t\right)$
Quindi il prodotto di un segnale ad alta frequenza ($\frac{\omega+\omega_0}{4\pi}$) relativamente alla frequenza $\frac{\omega-\omega_0}{4\pi}$ dell'altro fattore. L'ampiezza del segnale ottenuto viene modulata dal segnale a bassa frequenza (con periodo grande $\frac{4\pi}{\omega-\omega_0}$), mentre all'interno di questo periodo di modulazione di ampiezza, che è "l'ab-battimento" del volume che si sente, vi sono oscillazioni di ampiezza variabile ed alta frequenza, e "periodo" $\frac{4\pi}{\omega+\omega_0}$, corrispondente a due "su e giù". Quindi in un periodo di modulazione di ampiezza vi sono circa $2\frac{\omega+\omega_0}{\omega-\omega_0}$ su e giù.

- Si può riscontrare un parziale fenomeno di battimenti nel caso dell'oscillatore smorzato e forzato? L'analisi risulta più delicata in quanto è presente il fattore di smorzamento $e^{-\frac{\rho}{2}t}$ che moltiplica le funzioni trigonometriche. Il fenomeno si riscontrerebbe *approssimativamente* solo per opportuni intervalli temporali abbastanza piccoli per cui l'effetto di smorzamento esponenziale dell'ampiezza tra un estremo e l'altro sia trascurabile rispetto ai denominatori dati dalla differnza dei quadrati dell frequenze, ma nel contempo abbastanza grandi da contenere un numero significativo di "periodi" di modulazione di ampiezza. Possibile?

Primi esempi di prbabilità come rapporto tra casi favorevoli e casi possibili.

0- Probabilità come *frequenza relativa* dei casi interessanti rispetto a tutti i casi in considerazione
- La pobabilità è un numero tra 0 ed 1.

ARGOMENTO DI RIFLESSIONE: è stato chiesto come sono andate le ultime prove in itinere. L'insegnante risponde che il 65% degli studenti ha superato la prima parte in base alla sua statistica avendo corretto le prime parti.

Ora ogni studente sa i risultati della seconda parte e i criteri di valutazione della stessa, quindi uno studente A può soggettivamente attribuire una valutazione di successo p_A sulla seconda parte.

Quale sarà in base a questi dati (valutazione campionaria e valutazione soggettiva) la probabilità che lo studente A abbia superato la prova in itinere?

1- In un aula vi sono N studenti, tra cui solo 5 maschi. Con che probabilità scegliendo a caso si sceglie una femmina

2- Ad una festa da ballo vi sono 45 ragazze tra cui Laura, e 45 ragazzi tra cui Antonio. Gli uni vogliono ballare con le altre formando coppie. Con che probabilità Laura balla con Antonio?

Prima soluzione (suggerita dagli studenti): Laura (o Antonio) hanno 45 scelte possibili, il numero di casi di interesse del problema è solo 1: la probabilità è data dal rapporto casi favorevoli su casi possibili $\frac{1}{45}$.

Seconda soluzione: le possibili coppie sono $45!=45\cdot 44...\cdot 2\cdot 1$ le coppie "favorevoli sono quelle in cui Antonio è già accoppiato con Laura, sono quindi 44!: la probabilità è data dal rapporto casi favorevoli su casi possibili $\frac{44!}{45!}=\frac{1}{45}$

Cambia quello che si considera "caso" nelle due soluzioni.

- Digressione sul fattoriale: come ordinare un certo numero di persone,come numerare diversi oggetti, anagrammi di parole senza letter ripetute, come attriburie dati nomi diversi ad uno stesso numero di persone, etc . etc.

3-Altra festa da ballo: vi sono 90 ragazze tra cui Laura, la cara buona vecchia Laura, e 45 ragazzi tra cui Antonio, il caro buon vecchio Antonio. Come prima con che probabilità Laura balla con Antonio?

Prima soluzione (suggerita dagli studenti):
probabilità che A balli con L nel caso di 45 ragazzi e 90 ragazze=
=probabilità che L sia tra le ragazze che ballano $\times$
probabilità che A balli con L nel caso di 45 r.i e 45 r.e essendo una delle ragazze L=
$=\frac{1}{2}\ \frac{1}{45}=\frac{1}{90}$.

A questo punto si osserva che il procedimento seguito è senza dubbio il più naturale e semplice. Però dal punto di vista teorico non mette in risalto la probabilità come numero di casi favorevoli su numero di casi possibili. Introduce un importante nozione (*probabilità condizionale*) che semplifica in molti casi (come in questo) i calcoli e i ragionamenti e che verrà esaminata nelle prossime lezioni.

Seconda soluzione: dopo qualche tentativo con errori (prendere come casi possibili le scelte di 45 ragazze che ballano su 90 etc. etc.) ci si convince che i "casi possibili" devono avere come soggetto le coppie. Quindi l'approccio "num. casi favorevoli si num. casi possibili" sembra presentare come prima difficoltà quello di capire che cosa sono i "casi".

I casi possibili sono le possibili coppie che si formano tra 45 ragazzi e 45 ragazze al variare della scelta delle 45 ragazze tra le 90. Qui sorge la seconda difficoltà: senza dubbio le possibili coppie tra 45 ragazzi e 45 ragazze sono 45! e per ottenere il numero di casi possibili 45! va moltiplicato per il numero di possibili scelte di 45 ragazze tra le 90. Sono le combinazioni di 90 su 45.

I casi favorevoli: sono le coppie che si formano tra 45 ragazzi e 45 ragazze avendo Antonio come compagna Laura al variare delle scelte delle 45 ragazze sulle 90 in modo da comprendere Laura. Non si può negare che discernere i casi favorevoli sia un'altra difficoltà. Anche contarli richiede un piccolo ulteriore sforzo. Il loro numero pari a 44! (numero di coppie di 45 su 45 con A. che sta fisso con L. = le altre 44 si rigirano i cavalieri a piacere) moltiplicato le possibili scelte di 44 ragazze su 89 (Laura dev'esser per forza nel novero, quindi rimangono 44 ragazze da sceglere su 89).

La probabilità richiesta è quindi $\dfrac{\binom{89}{44}44!}{\binom{90}{45}45!}=\dfrac{\frac{89!}{45!}}{\frac{90!}{45!}}=\dfrac{1}{90}$

- Digresione sulle combinazioni e sulle disposizioni.

4- Quanti sono i numeri naturali con tre cifre decimali significative divisibili per 3? R: 300.

PROBABILITÀ COME RAPPORTO DI AREE: se lancio in una regione di area A con che probabilità vado a cadere in un sottoinsime di area B? Pensando le regioni continue come limite di unioni di quadratini eguali con lati sempre più piccoli (di un reticolo del piano) l' area di una regione non è altro che il limite del numero di quadratini che le compongono per l'area di un quadratino. Quindi la probabilità richiesta, essendo il limite del rapporto numero di quadratini su cui si vuole cadere diviso numero di quadratini che approssimano la regione più grande, è $\frac{B}{A}$.

Questa "visone giustifica visivamente" (facendo le "patate") la seguente formula
probabilità che accadano U o indifferentemente V =
probabilità di U + probabilità di V - probabilità che accadano sia U che V

5- Che probabilità scegliendo un numero naturale con tre cifre decimali significative che sia divisibile per 9 o anche per 15?

La probabilità è la probabilità che sia divisibile per 9 più quella che sia divisibile per 15 meno quella che sia divisibile per 45 $=\dfrac{\frac{900}{9}}{900}+\dfrac{\frac{900}{15}}{900}-\dfrac{\frac{900}{45}}{900}=\dfrac{7}{45}$