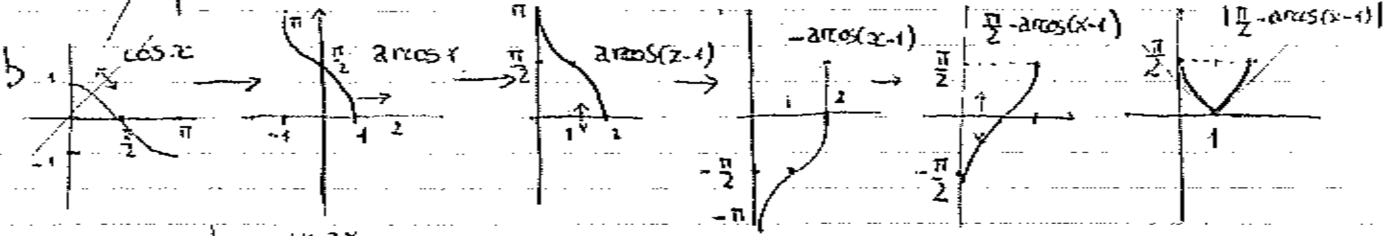
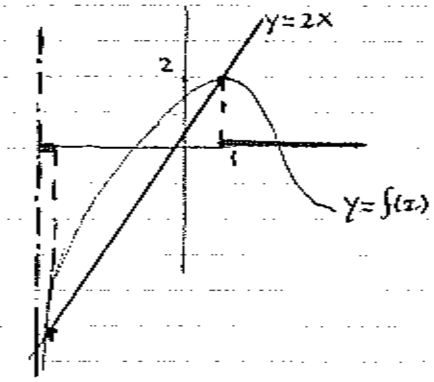
Soluzioni degli esercizi della PRIMA PROVA IN ITINERE 10/11/09

Matematica per Biotecnologie.

1.a $f(x) = (1+x^2)(x-1)(x-2)x$ ha solo le tre radici $0, 1, 2$; poiché:
$f(x) = x^5 +$ termini di grado minore, si ha $f \to +\infty$ per $x \to +\infty$, $f \to -\infty$ per $x \to -\infty$

è decrescente per x nell'intervallo evidenziato
(NOTA: a priori ci potrebbero essere altre oscillazioni ma un'analisi accurata dice che l'andamento è questo)

b.


c.


2.a. I multipli di 6 tra 1 e 50 sono 8 (6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48).
Un'estrazione di 5 su 50 tra quelle menzionate è individuata da 3 multipli e 2 restanti:
quindi il numero richiesto è $\binom{8}{3}\binom{42}{2} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{\cancel{3\cdot 2}} \cdot \frac{42\cdot 41}{2} = 4\cdot 7\cdot 42\cdot 41 =$
$= 48'216$

b. è $\frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$

3.a. $\overline{\left(\frac{1}{3+i}\right)^2} = \overline{\left(\frac{3-i}{9+1}\right)^2} = \left(\frac{3+i}{10}\right)^2 = \frac{9+6i-1}{100} = \frac{4}{50} + \frac{3}{50}i = \frac{2}{25} + \frac{3}{50}i$

b. $e^{\log 2 - i\frac{\pi}{6}} = e^{\log 2} e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i$

c. $z^2 i - 2z + 1 = 0$ considerando la radice quadrata di argomento principale minimo

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4i}}{2i} = \frac{1}{i}\left(1 \pm \sqrt{1-i}\right) = -i\left(1 \pm \sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{7}{4}\pi\right)\right)}\right) =$$
$$= -i\left(1 \pm \sqrt[4]{2}\left(\cos\tfrac{7}{8}\pi + i\sin\tfrac{7}{8}\pi\right)\right) = \pm\sqrt[4]{2}\sin\tfrac{7}{8}\pi - i\left(1 \pm \sqrt[4]{2}\cos\tfrac{7}{8}\pi\right)$$
$$z_1 = \sqrt[4]{2}\sin\tfrac{\pi}{8} + i\left(\sqrt[4]{2}\cos\tfrac{\pi}{8} - 1\right), \quad z_2 = -\sqrt[4]{2}\sin\tfrac{\pi}{8} - i\left(1 + \sqrt[4]{2}\cos\tfrac{\pi}{8}\right)$$

4. $\begin{cases} \cos x > \frac{1}{2} \\ x^2 - 6x < 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ 0 < x < 6 \end{cases}$, $\begin{cases} -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \ \text{o}\ 2\pi - \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi \\ 0 < x < 6 \end{cases}$, $0 < x < \frac{\pi}{3}$ o $\frac{5}{3}\pi < x < 6$
$]0, \frac{\pi}{3}[\cup]\frac{5}{3}\pi, 6[$

5.a Area $T_{(1,1,1),(1,2,3),(2,1,3)} =$ Area $T_{(0,0,0),(0,1,2),(1,0,2)} = \frac{1}{2}$ Area Parallelogramma $_{(0,0,0),(0,1,2),(1,0,2),(1,1,4)} =$
$= \frac{1}{2}\left|(0,1,2)\times(1,0,2)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right)^2 + \left(-\det\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4+4+1} = \frac{3}{2}$

b. Nuova origine $(1,2)$; coordinate con nuova O: $(5-1, 6-2) = (4,4)$; rotazione attorno nuova O $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4 - \frac{1}{2}4, \frac{1}{2}4 + \frac{\sqrt{3}}{2}4\right)$
$= (2\sqrt{3}-2, 2\sqrt{3}+2)$; rotazione con l'origine iniziale $(2\sqrt{3}-2+1, 2\sqrt{3}+2+2) = (2\sqrt{3}-1, 2\sqrt{3}+4)$

6. Siano x e y le quantità ($x \geq 0$, $y \geq 0$) dei due componenti.

Dalle ipotesi: QUANTITÀ DI C ESTRATTA $= \frac{25}{100} \cdot x + \frac{40}{100} y$

" " D " $= \frac{45}{100} \cdot x + \frac{30}{100} y$

quindi: PERCENTUALE DI D RISPETTO A C $= \dfrac{45x + 30y}{25x + 40y} \cdot 100 = F(x, y) \cdot 100$

Si tratta di vedere quale soglia non può superare al variare di $x \geq 0$, $y \geq 0$ (ma non entrambe nulle)

Ora F è una grandezza 0-omogenea quindi

$F(x, y) = F(\frac{x}{y}, 1) = F(1, \frac{y}{x})$ ora $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$ variano tra 0 e $+\infty$

per comodità si considera la seconda espressione per $x \neq 0$

$F(1, \frac{y}{x}) = \dfrac{45 + 30\frac{y}{x}}{25 + 40\frac{y}{x}}$ posto $\frac{y}{x} = t$ $= \dfrac{45 + 30t}{25 + 40t}$ $t \geq 0$, $(x \neq 0)$

e per tenere in considerazione il caso $x = 0$ direttamente si ha

$F(0, y) = F(0, 1) = \dfrac{3}{4}$

ora $F(1, \frac{y}{x}) = \dfrac{45 + 30t}{25 + 40t} = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{180 + 120t}{75 + 120t}\right) = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{180 - 75}{75 + 120t} + 1\right) =$

$= \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{105}{75 + 120t} + 1\right)$

che è <u>massimo</u> quando $t = 0$ cioè $y = 0$, e vale tale massimo

$\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{105}{75} + 1\right) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{180}{75} = \dfrac{540}{300} > \dfrac{3}{4}$

Quindi la percentuale richiesta è del 180%.

7. Se la palla e il piano si intersecano la distanza è nulla altrimenti è la differenza tra distanza del centro e raggio. Quindi basta trovare la distanza del centro (1, 2, 3) della palla dal piano.
Se tale distanza è minore eguale al raggio 2 della palla la distanza tra piano e palla è 0,

$$\mathrm{dist}\left((1,2,3), \{(xyz) : x+2y+2z=1\}\right) =$$

$$= \frac{|1+2\cdot 2+2\cdot 3-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|1+4+6-1|}{3} = \frac{10}{3} > 2$$

Quindi la distanza tra palla e piano è

$$\frac{10}{3}-2 = \frac{4}{3}.$$

8. Sia p la probabilità di avere successo al primo tentativo.
Per l'ipotesi i) la probabilità di avere successo all' n° tentativo e non prima è $p\frac{1}{3^{n-1}}$.
Per l'ipotesi ii)
$\mathbb{P}$ (successo al primo tentativo o successo al secondo ma non al primo o ... o successo all'n° ma non prima o ...) = 1
Poiché le diverse eventualità sono disgiunte (incompatibili),

$$1 = \mathbb{P}(\text{successo al primo}) + \mathbb{P}(\text{successo al secondo non al primo}) + \cdots =$$
$$= p + \frac{p}{3} + \frac{p}{9} + \cdots =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} p \frac{1}{3^{n-1}} = p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}} = p\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{3^{m}} = \frac{p}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}p$$

Quindi: $p = \frac{2}{3}$.