ESERCIZIO n. 1

a- Si determinino i valori di primo quartile, cerchiandoli in figura, del campione di cui è riportato un diagramma di frequenza.

b- Il grafico riportato è quello di una funzione di ripartizione, continua e strettamente crescente, di una grandezza aleatoria: si determini graficamente il valore di mediana di tale grandezza.

c- Nella figura superiore è riportato un diagramma cumulativo di frequenza per un certo campione ordinato: si anneriscano le caselle della griglia inferiore per mettere in evidenza il relativo diagramma di frequenza.

ESERCIZIO n. 2

a- Cinque ceppi batterici sottoposti a trattamento presentano rispettivamente un tasso di mortalità del 90%, 30%, 60%, 90%, 30%: si calcolino tasso di mortalità medio e sua varianza.

b- Sottoposti ad un secondo trattamento questi dati si modificano rispettivamente in 30%, 50%, 40%, 30%, 50%. Si calcoli la correlazione lineare tra i due campioni.

ESERCIZIO n. 3 In un gioco d'azzardo pagando 10 si vince: 5 con probabilità 2/3, 15 con probabilità' 1/6, 20 con probabilità 1/6. Si calcoli il bilancio medio di una "puntata" e la sua varianza.

ESERCIZIO n. 4 Si calcolino i seguenti limiti:

a- $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}+10n^2-n^3}{n^3+\log n}$, b- $\lim_{x\to 0} \frac{x+x^2-100x^3}{2x-x^2}$.

ESERCIZIO n. 5 Per $2l \pm 2dl$ di soluto in $8-10l$ di solvente:

a- entro che limiti percentuali varia la concentrazione?

b- con che errore relativo la si può valutare?

• ESERCIZIO n. 6 Una grandezza aleatoria X può assumere solo come valori le potenze di 2 con funzione di distribuzione $P(X=2^n)=\frac{c}{5^n}$, n in N.

a- Si calcoli c per cui effettivamente quella data sia la distribuzione di probabilità sui valori ammissibili.

b- Si calcoli il valor medio di X.

c- Si calcoli la varianza di X.

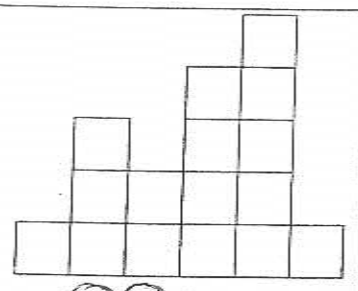
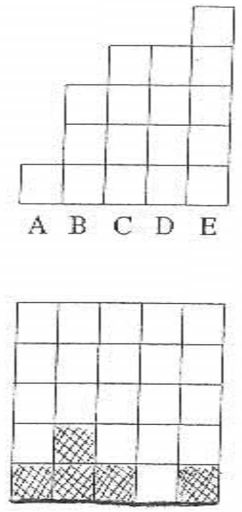
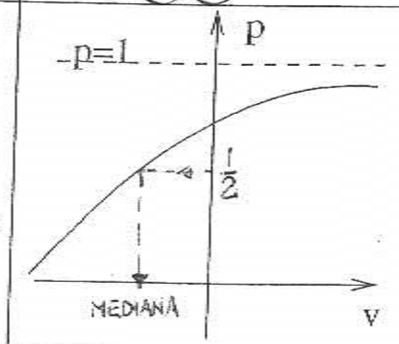
• ESERCIZIO n.7 Si calcoli $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$.

• ESERCIZIO n.8 Per approssimare $\sqrt{2}$ con l'algoritmo di bisezione a partire dalla valutazione per difetto 1 e da quella per eccesso 2 (quindi con errore $\frac{1}{2}$ e valutazione $\frac{3}{2}$), quante iterazioni sono necessarie per avere un errore relativo dell' 1%?

Matematica, Anno Accademico 2009-2010,
Biotecnologie
Vincenzo M. Tortorelli
II prova in itinere : 18 Gennaio 2010

COGNOME		N. MATRICOLA	
NOME		ANNO	

ISTRUZIONI al fine della valutazione:
- *compilare l'intestazione in stampatello maiuscolo* con nome e cognome, numero di matricola ed anno di immatricolazione;
- *riportare con ordine* lo svolgimento della soluzione agli esercizi contrassegnati da $\ast$;
- scrivere, nello spazio apposito all'interno della tabella sottostante, *solo* la risposta agli altri;
- il tutto sul presente foglio, *l'unico* che deve essere consegnato.

1a		1c	
1b			

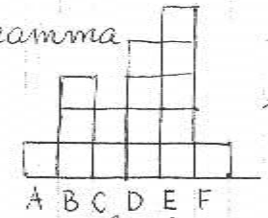
2a	$0,072 \left(\frac{9}{125}\right)$ $60\% \left(\frac{3}{5}\right)$ MEDIA	2b	-1
3	MEDIA $-\frac{5}{6}$; $36,80$ VARIANZA $\left(\frac{1325}{36}\right) \lesssim 37$		
4a	-1	4b	$\frac{1}{2}$
5a	$18\% \left(\frac{9}{50}\right)$ $27,5\% \left(\frac{11}{40}\right)$	5b	$0,2\bar{1} \left(\frac{19}{90}\right)$

Soluzioni ai quesiti della II prova in itinere del 18/01/10

esercizi senza svolgimento

1.a È sottointeso che i caratteri siano ordinati: A<B<C<D<E<F.

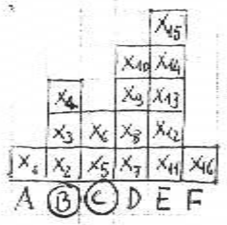
Dal diagramma



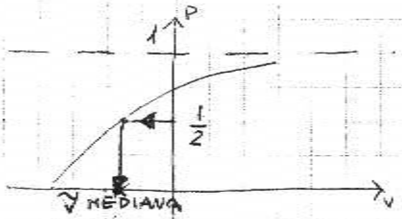
si desume che il totale dei soggetti del campione è rappresentato da 16 quadretti, e mantenendo questa proporzione le frequenze sono $F_A \sim 1q$ $F_B \sim 3q$ $F_C \approx 2q$

Poichè $\frac{1}{4} \cdot 16$ è intero vi possono essere due valori per il primo quartile $X_{\frac{1}{4}16}$ e $X_{\frac{1}{4}16+1}$ cioè X_4 e X_5

ma $X_4 = B$ e $X_5 = C$, essendo come convenzione il campione ordinato in modo non decrescente.

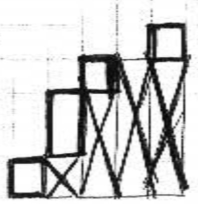


1.b Per una funzione di ripartizione continua e strettamente crescente $F(v) = P(\underline{X} \le v)$ la mediana è quel valore $\tilde{v}$ per cui $F(\tilde{v}) = \frac{1}{2}$.



Per risolvere tale equazione graficamente si evidenzia sull'asse orizzontale il punto corrispondente all'ascissa del punto di intersezione tra grafico di F e retta orizzontale di quota $\frac{1}{2}$.

1.c Il diagramma cumulativo si ottiene da quello delle frequenze giustapponendo via via le successive colonne; viceversa togliendo la colonna precedente da quello cumulativo si ottiene quello delle frequenze:



riportando quanto rimasto a "quota zero"

2.a Il tasso di mortalità medio:

$$\frac{2}{5}\,\frac{90}{100} + \frac{2}{5}\cdot\frac{30}{100} + \frac{1}{5}\,\frac{60}{100} = \frac{1}{5}\,\frac{180+60+60}{100} = \frac{1}{5}\,\frac{300}{100} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

corrispondente al 60%.

La sua varianza:

$$\frac{2}{5}\left(\frac{90}{100}-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{30}{100}-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{60}{100}-\frac{3}{5}\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{10}\right)^2 + 0 =$$

$$= \frac{4}{5}\,\frac{9}{100} = \frac{9}{125} = 0{,}072$$

2.b

x_i	$9/10$	$3/10$	$6/10$	$9/10$	$3/10$	$\langle X\rangle$	$6/10$	$V_x = \frac{9}{125}$	$\sigma_x = \frac{3}{5\sqrt5}$
y_i	$3/10$	$5/10$	$4/10$	$3/10$	$5/10$	$\langle Y\rangle$	$4/10$	$V_y = \frac{1}{125}$	$\sigma_y = \frac{1}{5\sqrt5}$
$x_i-\langle x\rangle$	$3/10$	$-3/10$	0	$3/10$	$-3/10$				
$y_i-\langle y_i\rangle$	$-1/10$	$1/10$	0	$-1/10$	$1/10$				

$$\text{cov} \quad \frac{1}{5}\left(-4\cdot\frac{3}{100}\right) = -\frac{3}{125}$$

$$\text{corr} = -\frac{\cancel{3}}{125}\,\frac{1}{\frac{\cancel{3}}{5\sqrt5}\cdot\frac{1}{5\sqrt5}} = -\frac{1}{125}\;5\cdot 25 = -1$$

3 X variabile aleatoria di bilancio =

= Y variabile aleatoria di vincita − 10:

$$P(Y-10=5-10)=\frac{2}{3},\quad P(Y-10=15-10)=\frac{1}{6},\quad P(Y-10=20-10)=\frac{2}{3}$$

cioè

$$P(X=-5)=\frac{2}{3},\quad P(X=5)=\frac{1}{6},\quad P(X=10)=\frac{1}{6}$$

$$\langle X\rangle = (-5)\,\frac{2}{3} + 5\cdot\frac{1}{6} + 10\cdot\frac{1}{6} =$$

$$= -\frac{10}{3} + \frac{15}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$\text{Var}(X) = \langle (X-\langle X\rangle)^2\rangle = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 = \frac{225}{6} - \frac{25}{36} = \frac{25\cdot 53}{36} = \frac{1325}{36} \lesssim 3$$

$$\langle X^2\rangle = (-5)^2\frac{2}{3} + 5^2\frac{1}{6} + 10^2\frac{1}{6} = \frac{225}{6}$$

si mette in evidenza il più grosso per $n \to \infty$

4a. $\frac{e^{-n}+10n^2-n^3}{n^3+\log n} = \frac{n^3}{n^3}\frac{\left(-1+\frac{10}{n}+\frac{e^{-n}}{n^3}\right)}{\left(1+\frac{\log n}{n^3}\right)} = \frac{-1+\frac{10}{n}+\frac{e^{-n}}{n^3}}{1+\frac{\log n}{n^3}}$

$\frac{10}{n} \to 0$, $e^{-n} \to 0$, $\frac{1}{n^3} \to 0$, $\frac{\log n}{n^3} \to 0$ per $n \to +\infty$

$\longrightarrow -1$

Si mette in evidenza il più grosso per $x \to 0$

4b $\frac{x+x^2-100x^3}{2x-x^2} = \frac{x(1+x-100x^2)}{x(2-x)} = \frac{1+x-100x^2}{2-x} \longrightarrow \frac{1}{2}$

per $x \to 0$

5a. Concentrazione percentuale $= \frac{\text{soluto}}{\text{solvente}} \cdot 100 = C \cdot 100$

$C_{MIN} = \frac{Solu_{MIN}}{Solv_{MAX}} \leq C \leq \frac{Solu_{MAX}}{Solv_{MIN}} = C_{MAX}$

$2l - 2dl \leq Solu. \leq 2l + 2dl$ $\qquad 1{,}8\,l \leq Solu \leq 2{,}2\,l$

$8l \leq Solv \leq 10l$

$C_{MIN} = \frac{1{,}8}{10} = 0{,}18 = \frac{9}{50}$ $\qquad C_{MAX} = \frac{2{,}2}{8} = 0{,}275 = \frac{11}{40}$

18 e 27,5 sono i limiti della concentrazione percentuale

5b Conviene ricordare: l'errore relativo di un quoziente $\leq$ somma degli errori relativi di divisore e dividendo

$Solu = 2l \pm 0{,}2\,l$ $\qquad e^R_{Solu} = \frac{1}{10}$

$8l \leq Solv \leq 10l$ $\qquad Solv = 9l \pm 1l$ $\quad e^R_{Solv} = \frac{1}{9}$

$e^R_{C_{perc}} = e^R_C \leq \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = \frac{19}{90} = 0{,}2\overline{1}$

Soluzioni ai quesiti della II prova in itinere del 18/01/10

esercizi con svolgimento 6, 7, 8

6.a Per ipotesi X non può assumere valori diversi dalle potenze di 2, cioè

in ogni caso esiste $n \in \mathbb{N}$ $X = 2^n$

(pensando X come funzione $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$\forall \omega \in \Omega \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \quad X(\omega) = 2^n$

in altre parole $\Omega = \{\omega : \exists n \in \mathbb{N}\ X(\omega) = 2^n\}$

cioè $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega : X(\omega) = 2^n\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X = 2^n\}$)

in particolare $P(\{\exists n \in \mathbb{N}\ X = 2^n\}) = 1$

$1 = P(\{\exists n \in \mathbb{N}\ X = 2^n\}) = P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X = 2^n\}) =$

essendo gli eventi $\{X = 2^n\}$ a due a due disgiunti per le regole del calcolo delle probabilità

$= \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 2^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{5^n} = c \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = c \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{4}{5}}$

Quindi $c = \frac{4}{5}$.

6.b $\langle X \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n P(X = 2^n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{4}{5} \frac{1}{5^n} = \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n =$

$= \frac{4}{5} \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{4}{5} \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$

6.c $\mathrm{Var}(X) = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle (X - \frac{4}{3})^2 \rangle =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - \frac{4}{3})^2 P(X = 2^n) = \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - \frac{4}{3})^2 \cdot \frac{1}{5^n} =$

$= \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (2^{2n} - \frac{8}{3} 2^n + \frac{16}{9}) \frac{1}{5^n} = \frac{4}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{4}{5} \cdot \frac{16}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

$= \frac{4}{5} \frac{1}{1-\frac{4}{5}} - \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{4}{5} \cdot \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} =$

$= 4 - \frac{32}{9} + \frac{16}{9} = \frac{20}{9}$

7

$$\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2^n}\frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{1}{2^n}\frac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n!} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\frac{(n+n)(n+(n-1))\cdots(n+h)\cdots(n+1)}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot h\cdot\ldots\cdot 1}$$

si associno i fattori nell'ordine

$$= \frac{1}{2^n}\frac{n+n}{n}\cdots\frac{n+h}{h}\cdots\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n+1}{1}$$

per ogni fattore si distribuisca $\frac{1}{2}$

$$= \frac{n+n}{2n}\cdots\frac{n+h}{2h}\cdots\frac{n+2}{4}\cdot\frac{n+1}{2} \geq \frac{n+1}{2}$$

ogni fattore $\frac{n+h}{2h} \geq 1$: $n \geq h$ quindi $n+h \geq 2h$

$$\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} \geq \frac{n+1}{2} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } n \to +\infty$$

8.

$1^2 < 2 < 2^2$

$a_0 = 1 \leq \sqrt{2} \leq b_0 = 2$ $\qquad v_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3}{2}$ $\boxed{e^0 = \frac{1}{2}}$ $\quad e_r^0 = \frac{1}{3}$

$\wedge \qquad \vee \qquad v_0^2 = \frac{9}{4} > 2$ quindi alla prima iterazione

$a_1 = a_0 = 1 \qquad b_1 = v_0 = \frac{3}{2} \qquad v_1 = \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$ $\boxed{e^1 = \frac{\frac{3}{2}-1}{2} = \frac{1}{4}}$ $\quad e_r^1 = \frac{1}{5}$

$\wedge \qquad \vee \qquad v_1^2 = \frac{25}{16} < 2$ quindi per la seconda

$a_2 = v_1 = \frac{5}{4} \qquad b_2 = b_1 = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \qquad v_2 = \frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}}{2} = \frac{11}{8}$ $\boxed{e^2 = \frac{1}{8}}$ $\quad e_r^2 = \frac{1}{11}$

$\wedge \qquad \vee$

$\vdots \qquad \vdots \qquad$ etc....

In generale all'iterazione n^a l'errore assoluto $e^n = \frac{1}{2^{n+1}}$

poiché $v_n \geq a_n \geq a_0 = 1$

si ha $e_{rel}^n = \frac{e^n}{v_n} \leq e^n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

quindi per avere $e_{rel}^n \leq \frac{1}{100}$ basta che $\frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{100}$

cioè $n+1 \geq 7$ cioè $n \geq 6$ poiché $2^7 = 128 > 100$

Quindi sono sufficienti 6 iterazioni.

Se consideriamo che $n \geq 2$ si avrebbe $v_n \geq a_n \geq a_2 = \frac{5}{4}$

ma questo non basta per dire che sono sufficienti 5 iterazioni.

Ora che bastino 6 iterazioni è stabilito: ma ce ne vogliono proprio 6?

conviene procedere direttamente

$a_2 = \frac{5}{4}$ $\quad b_2 = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ $\quad v_2 = \frac{11}{8}$ $\quad e^2 = \frac{1}{8}$ $\quad e_r^2 = \frac{1}{11}$

$\wedge \qquad \vee \qquad v_2^2 = \frac{121}{64} < 2$

$a_3 = \frac{11}{8}$ $\quad b_3 = \frac{3}{2} = \frac{12}{8}$ $\quad v_3 = \frac{23}{16}$ $\quad e^3 = \frac{1}{16}$ $\quad e_r^3 = \frac{1}{23}$

$\wedge \qquad \vee \qquad v_3^2 = \frac{23^2}{16^2} = \frac{529}{256} > 2$

$a_4 = \frac{11}{8} = \frac{22}{16}$ $\quad b_4 = \frac{23}{16}$ $\quad v_4 = \frac{45}{32}$ $\quad e^4 = \frac{1}{32}$ $\quad e_r^4 = \frac{1}{45}$

$\wedge \qquad \vee \qquad v_4^2 = \frac{2025}{1024} < 2$

$a_5 = \frac{45}{32}$ $\quad b_5 = \frac{23}{16} = \frac{46}{32}$ $\quad v_5 = \frac{91}{64}$ $\quad e^5 = \frac{1}{64}$ $\quad e_r^5 = \frac{1}{91}$

quindi 5 iterazioni non bastano, ce ne vogliono proprio 6.

Nel caso poiché $v_5^2 = \frac{8281}{4096} > 2$, si può dire

$a_6 = \frac{45}{32} = \frac{90}{64}$ $\quad b_6 = \frac{91}{64}$ $\quad v_6 = \frac{181}{128}$ $\quad e^6 = \frac{1}{128}$ $\quad \underline{e_r^6 = \frac{1}{181}}$.