BTM Soluzioni ai quesiti dello scritto del giorno 8 luglio 2010

1 La retta ortogonale al piano di equazione $x+y+z=4$ è data dal cammino $s \mapsto s(1,1,1) = (s,s,s)$ essendo l'equazione del piano parallelo per l'origine una condizione di ortogonalità con il vettore $(1,1,1)$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{3}\,\cos\widehat{(x,y,z)\,(1,1,1)} = (x,y,z)\cdot(1,1,1) = x+y+z = 0$$

Il coseno dell'angolo tra le rette date dai due cammini $s \mapsto (s,s,s)$ $t \mapsto (t,2t,3t)$ è quello tra i due vettori velocità $(1,1,1)$, $(1,2,3)$

$$\cos\theta = \frac{(1,1,1)\cdot(1,2,3)}{|(1,1,1)|\,|(1,2,3)|} = \frac{1+2+3}{\sqrt{3}\,\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{7}}$$

2 Il sistema $\begin{cases} \alpha x + y - z = 1 \\ x - \alpha y + z = 2 \\ x + y - \alpha z = 3\alpha \end{cases}$ può esser visto come

$$x\begin{pmatrix}\alpha\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\-\alpha\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\1\\-\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\alpha\end{pmatrix}$$

Quindi se i tre vettori al primo membro <u>non sono</u> complanari con l'origine, formando un sistema di riferimento, <u>vi è sempre una sola soluzione</u>.

Ma esser complanari con l'origine equivale a

$$\det\begin{pmatrix}\alpha & 1 & -1\\ 1 & -\alpha & 1\\ 1 & 1 & -\alpha\end{pmatrix} = 0 \quad \text{cioè} \quad \alpha(\alpha^2-1)=0$$

cioè $\alpha=0$ ó $\alpha=1$ ó $\alpha=-1$

Vanno quindi esaminati questi tre casi:

$\alpha=0$ $\begin{cases} y - z = 1 \\ x + z = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $+$ $x+y=3$ NON HA SOLUZIONE

$\alpha=1$ $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$ $2x=3$, $2x=5$ NON HA SOLUZIONE

$\alpha=-1$ $\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$ NON HA SOLUZIONE

3 $z \in \mathbb{C}$ $e^{z^2} = i+1$, $z = x+iy$ $e^{z^2} = e^{x^2-y^2+2xyi} = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i\sin 2xy)$

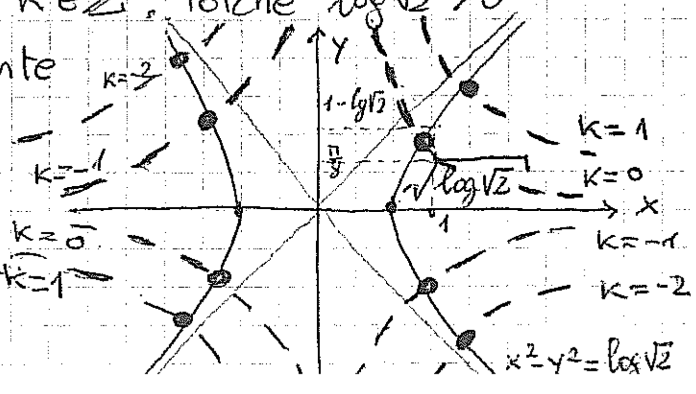
$$e^{x^2-y^2+2xyi} = e^{\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i}$$

- $|e^{z^2}| = |i+1|$ è la condizione $e^{x^2-y^2} = \sqrt{2}$, $x^2-y^2 = \log\sqrt{2}$
- $\operatorname{Re} e^{z^2} = \operatorname{Re}(i+1)$ si riduce a $\cos 2xy = \cos\frac{\pi}{4}$ cioè $2xy = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{Im} e^{z^2} = \operatorname{Im}(i+1)$ " " $\sin 2xy = \sin\frac{\pi}{4}$

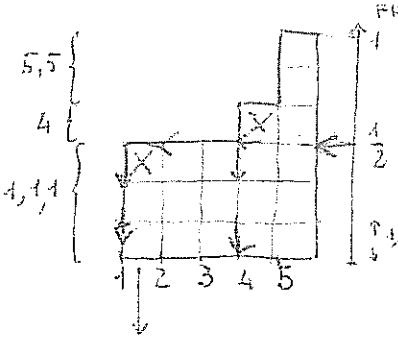
Quindi le soluzioni $z = x+iy$ devono soddisfare $\begin{cases} x^2 - y^2 = \log\sqrt{2} \\ xy = \frac{\pi}{8} + k\pi \end{cases}$

per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Poichè $\log\sqrt{2} > 0$

graficamente le soluzioni sono tutte le intersezioni dell'iperbole $x^2-y^2=\log\sqrt{2}$ con ognuna $xy = \frac{\pi}{8} + k\pi$



4 a



CAMPIONE ORDINATO

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$

1 1 1 4 5 5

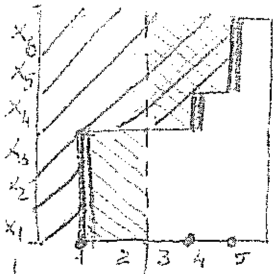
CON LA DATA RIPARTIZIONE

MODA = 1

MEDIANI = $\{1, 4\}$

MEDIA = $\dfrac{17}{6}$

SOTTOGRAFICO DEL CAMPIONE ORDINATO



VALORI IN SCALA RAPPORTALE

$1\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} = \frac{17}{6}\cdot 1$

MEDIA

La media è quel valore per cui il rettangolo di base 1 e altezza la media stessa ha area eguale a quella del grafico (uniforme) del campione

b $$\text{VAR} = \frac{1\cdot 3 + 16\cdot 1 + 25\cdot 2}{6} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{19+50}{6} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{69\cdot 6 - 17\cdot 17}{36}$$

$$= \frac{414-289}{36} = \frac{125}{36} = \frac{36\times 3 + 17}{36} = 3 + \frac{17}{36} = 3 + \frac{1}{10}\left(\frac{170}{36}\right) =$$

$$= 3 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100}\,\frac{130}{18} = 3{,}4 + \frac{1}{100}\,\frac{130}{18}$$

$$e_r = \frac{\text{VAR} - 3{,}4}{3{,}4} = \frac{13}{180}\cdot\frac{10}{34} = \frac{13}{612} = \frac{1}{100}\cdot\frac{1300}{612} > \frac{1}{100}\,\frac{1224}{612} = \frac{2}{100}$$

$$= 3{,}4 + \frac{1}{100}\,\frac{18\times 7 + 4}{18} = 3{,}47 + \frac{1}{100}\cdot\frac{2}{9}$$

$$e_r = \frac{\text{VAR} - 3.47}{3.47} = \frac{2}{900}\,\frac{100}{347} = \frac{2}{347} < \frac{2}{200} = \frac{1}{100}$$

$$\text{VAR} \approx 3{,}47 + 10^{-2}$$

5. a Per ogni seme si hanno otto VALORI: A K Q J 10 9 8 7
essendo quattro i semi si hanno $8 \times 4 = 32$ carte.

PROBABILITÀ SU 5 CARTE ESTRATTE DI AVERE 4 ASSI $= \dfrac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}} =$

numero casi possibili = numero di scelte di 5 su 32 $= \binom{32}{5}$

numero casi favorevoli = numero di scelte di 4 su 4 × numero di scelte di 1 su 28 $= \binom{4}{4}\binom{28}{1}$

$= [\text{DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA}] \quad \dfrac{\binom{4}{4}\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}} = \dfrac{1 \cdot \cancel{28} \cdot \cancel{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}}{\cancel{32}^{8} \cdot 31 \cdot \cancel{30} \cdot 29 \cdot \cancel{28}} = \dfrac{1}{31 \cdot 29 \cdot 8} =$

$= \dfrac{1}{899 \cdot 8} = \dfrac{1}{7192}$

b Sia S la scommessa in una mano, $10S$ l'eventuale vincita in una mano
il ricavato in una mano è: $9S$ se si vince, $-S$ se si perde
Si considera la variabile aleatoria $R = \begin{cases} 9S & \text{se si vince} \\ -S & \text{se si perde} \end{cases}$

$\mathbb{P}(R = 9S) = \mathbb{P}(\text{fare un qualsiasi poker}) = p$

$\mathbb{P}(R = -S) = 1 - p$

$\langle R \rangle = \sum v\, \mathbb{P}(R = v) = 9Sp - S(1-p) = 8Sp - S = (8p-1)S$

Le dieci mani si modellizzano con dieci variabili aleatorie <u>indipendenti</u> distribuite come R

$B = R_1 + R_2 + \dots + R_{10}$ è la variabile aleatoria del bilancio tra vincite e perdite in 10 mani

$\langle B \rangle = \langle R_1 + \dots + R_{10} \rangle = \langle R_1 \rangle + \dots + \langle R_{10} \rangle =$

$= 10 \langle R \rangle = 10(8p-1)S$

è il bilancio medio in 10 mani. La sua percentuale rispetto alla cifra scommessa complessivamente in dieci mani è:

$\dfrac{\langle B \rangle}{10S} \cdot 100\,\% = (8p-1)\,\%$

Si tratta di calcolare $p = \mathbb{P}(\text{fare un qualsiasi poker}) =$

$= \mathbb{P}(\text{o fare poker di A o fare poker di K o} \dots \text{o fare poker di 7}) =$

[eventi disgiunti] $\mathbb{P}(\text{poker A}) + \mathbb{P}(\text{poker K}) + \dots + \mathbb{P}(\text{poker 7}) =$

[eventi equidistribuiti] $8 \cdot \mathbb{P}(\text{poker A}) = \dfrac{1}{899}$

Quindi il bilancio medio in 10 mani è $\left(\dfrac{8}{899} - 1\right)\% = -\dfrac{891}{899}\% \sim -0{,}99$ rispetto alla scommessa totale

6 a La retta tangente al grafico di una funzione $y = f(x)$ in un suo punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$$

nel caso

$$f(x) = \frac{\operatorname{artan}(1-\log x)}{x} \qquad x_0 = 1 \qquad f(x_0) = \operatorname{artan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \frac{x\,\frac{1}{1+(1-\log x)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) - \operatorname{artan}(1-\log x)}{x^2} \qquad f'(1) = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$y = -\frac{2+\pi}{4}x + \frac{1+\pi}{2}$$

b Se in un punto (x_0, y_0, z_0) $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0y_0z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0y_0z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0y_0z_0)\right) \neq$
$\neq (0, 0, 0)$

allora vicino a tale punto $\{(x,y,z) : f(x_0y_0z_0) = f(x,y,z)\} \cap \{(x,y,z)\}$
è un grafico con piano tangente in $(x_0 y_0 z_0)$
ortogonale a $\nabla f(x_0 y_0 z_0)$

nel caso

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -1) \qquad f(x,y,z) = x + y^2 + z^3, \quad f(1,1,-1) = 1$$

$$\nabla f(1,1,-1) = (1, 2y, 3z^2)\Big|_{\substack{x=1\\y=1\\z=-1}} = (1, 2, 3) \neq (0,0,0)$$

quindi vi è piano tangente a $\{(x,y,z) : f(x,y,z) = 1\}$
$\{(x,y,z) : x + y^2 + z^3 = 1\}$ nel punto $(1, 1, -1)$

è il piano passante per tale punto $(1, 1, -1)$
ortogonale a $(1, 2, 3)$

$$((x-1), (y-1), (z+1)) \cdot (1, 2, 3) = 0 \qquad \text{cioè}$$

$$x - 1 + 2(y-1) + 3(z+1) = 0 \qquad \text{cioè}$$

$$x + 2y + 3z = 0$$

7 Se una superficie S è data come grafico di una funzione $z = g(x,y)$ $(x,y) \in D$ di due variabili

$$\int_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(x,y,g(x,y)) \sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2}\, dx\,dy$$

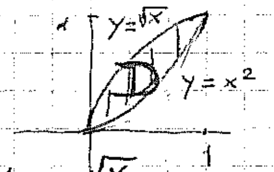
- nel caso $f(x,y,z) = z$ e la superficie è $z = -x-y$ $D = (x,y)$ $0 \le x^2 y \le y^2 \le x$. Quindi si tratta di calcolare

$$I = \iint_{\{(x,y):\, 0\le x^2y\le y^2\le x\}} (-x-y)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\, dx\,dy = -\sqrt{3}\iint_{0\le x^2y\le y^2\le x} (x+y)\,dx\,dy$$

- si scompone il dominio in zone comprese tra grafici di funzioni di una variabile

poichè $x, y \ge 0$ le condizioni di definizione $\begin{cases} 0 \le x^2 y \\ x^2 y \le y^2 \\ y^2 \le x \end{cases}$ sono equivalenti a $\begin{cases} 0 \le x^2 y \\ x^2 \le y \quad \text{o } y = 0 \\ y^2 \le x \end{cases}$ e quindi a

$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$ cioè $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$



- $$I = -\sqrt{3}\iint_{0\le x^2y\le y^2\le x} (x+y)\,dx\,dy = -\sqrt{3}\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy\right) dx =$$

$$= -\sqrt{3}\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\,dy + \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy\right) dx = -\sqrt{3}\int_0^1 \left(x\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1\cdot dy + \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy\right) dx =$$

$$= -\sqrt{3}\int_0^1 \left(x(\sqrt{x}-x^2) + \frac{(\sqrt{x})^2}{2} - \frac{(x^2)^2}{2}\right) dx =$$

$$= -\sqrt{3}\int_0^1 \left(x^{3/2} - x^3 + \frac{x}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx =$$

$$= -\sqrt{3}\left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = -\sqrt{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right) =$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{10}.$$

8a X e Y indipendenti equidistribuite come

$$\mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{ds}{\pi(1+s^2)} \qquad \mathbb{P}(Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{dt}{\pi(1+t^2)}$$

- In effetti $\frac{1}{\pi(1+s^2)}$ è una densità!
  (1) è non negativa
  (2) è continua
  (3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\pi(1+s^2)} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{ds}{\pi(1+s^2)} + \lim_{m\to-\infty} \int_m^0 \frac{ds}{\pi(1+s^2)} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan n}{\pi} + \lim_{m\to-\infty} \frac{-\arctan m}{\pi} = \frac{1}{2} + \left(-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 1$$

- $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}((X,Y) \in \{(x,y) : x > y\})$

ora essendo X, Y indipendenti la variabile vettoriale $Z = (X,Y)$ ha densità eguale al prodotto separato delle densità delle componenti

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+y^2}$$

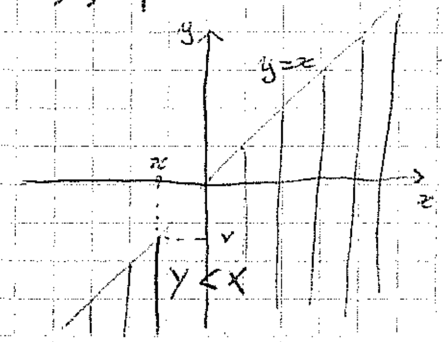
cioè

$$\mathbb{P}((X,Y) \in B) = \frac{1}{\pi^2} \iint_B \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

per ogni $B \subseteq \mathbb{R}^2$ per cui la senso l'integrale

In particolare $B = \{(x,y) : x > y\}$, quindi

$$\mathbb{P}(X > Y) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\{(x,y) : x > y\}} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)} =$$



il dominio è sottografico di $f(x) = x$
$x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} \frac{dy}{(1+x^2)(1+y^2)} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \left(\int_{-\infty}^{x} \frac{dy}{1+y^2} \right) dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) \frac{d\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right)}{dx}\, dx = \quad \left[y = \arctan x + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int^{\pi} y\, dy = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{2}$$

b La variabile aleatoria $A = (\arctan X)^2$ è ben definita.

- Si può definire la media di $A = h(X)$ solo se $\frac{|h(x)|}{(1+x^2)}$ è sommabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$

nel caso $\frac{|\arctan x|^2}{1+x^2}$ è integrabile su intervalli poichè continua, e $0 \leq \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2} \leq \frac{\pi^2}{4(1+x^2)}$

comporta $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2} dx \leq \frac{\pi^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} < +\infty$

- Quindi per definizione

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan x)^2 \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx =$$

$$\sum v \, \mathbb{P}(A=v)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan x)^2 \frac{d \arctan x}{dx} dx = [y = \arctan x]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 dy = \frac{1}{\pi} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} 2 \frac{\pi^3}{3 \cdot 2^3} =$$

$$= \frac{\pi^2}{12}$$

9 Soluzioni di $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}$

- soluzioni omogenea

  Polinomio associato $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$

  radice "doppia" $\lambda = -1$

  $z(t) = a e^{-t\lambda} + bt e^{-t\lambda} = a e^{-t} + bt e^{-t}$

  al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

- soluzione particolare: metodo dei coefficienti indeterminati

  poichè il termine forzante è del tipo $e^{\lambda t}$, λ radice del polinomio associato all'equazione

  si cerca una soluzione

  $p(t) = \alpha t^{\mu} e^{\lambda t}$ μ molteplicità di λ nel caso $\lambda = -1$, $\mu = 2$

  $p(t) = \alpha t^2 e^{-t}$

  vale la pena scrivere $p(t) = \alpha t z(t)$

  ($z(t) = te^{-t}$ è soluzione dell'omogenea)

  Per trovare α si impone senz'altro che p sia soluzione

  $p'' + 2p' + p = e^{-t}$

  $p' = \alpha z + \alpha t z'$ $\quad p'' = 2\alpha z' + \alpha t z''$ sostituendo

  $2\alpha z' + \cancel{\alpha t z''} + 2\alpha z + \cancel{2\alpha t z'} + \cancel{\alpha t z} = e^{-t}$

  considerando che z è soluzione dell'omogenea

  $\alpha(z' + z) = \dfrac{e^{-t}}{2}$

  $z(t) = te^{-t}$

  $z'(t) = e^{-t} - te^{-t}$

  $\alpha = \dfrac{1}{2}$ $\quad z' + z = e^{-t}$

  Quindi $p(t) = \dfrac{t^2}{2} e^{-t}$

- le soluzioni son quindi

  $y(t) = \left(a + bt + \dfrac{t^2}{2}\right)e^{-t} \quad a, b \in \mathbb{R}.$