Matematica, Biotecnologie A.A. 2010-11

IV appello ordinario 31 gennaio 2011

1) Il piano $\{(x,y,z) : x-2y+3z-4=0\}$ è determinato dalla condizione $x-2y+3z=4$ cioè $(x-4)-2y+3z=0$ cioè

$((x-4), y, z)\cdot(1,-2,3)=0$, quindi è ortogonale alla direzione dall'origine a $(1,-2,3)$.

D'altronde il cammino $t \mapsto (t,t,t) = t(1,1,1)$ è parallelo alla direzione $(1,1,1)$ ed incontra il piano per $t=2$ in $(2,2,2)$

Quindi l'angolo di incidenza è $\widehat{(1,1,1)(0,0,0)(1,-2,3)} = \theta$

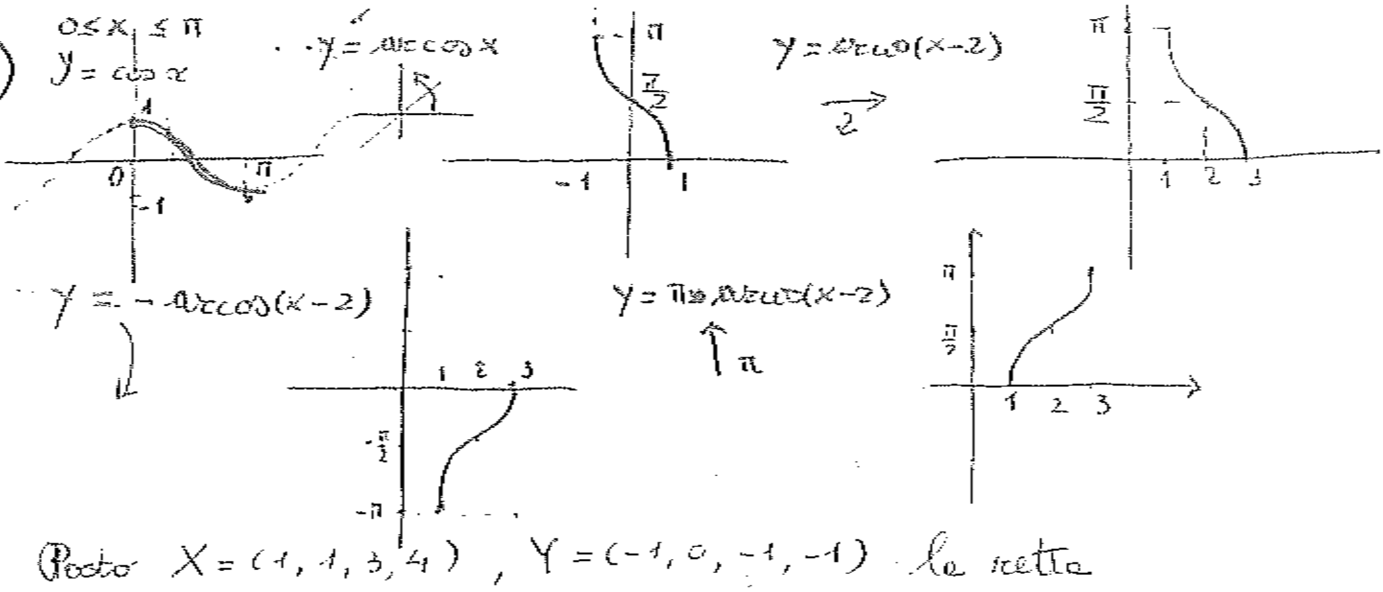
$$\cos\theta = \frac{(1,1,1)\cdot(1,-2,3)}{|(1,1,1)|\cdot|(1,-2,3)|} = \frac{1-2+3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{2}{\sqrt3\sqrt{14}} = \boxed{\sqrt{\frac{2}{21}}} \sim 0{,}30$$

2) $$\overline{\left(\frac{1}{1-i}\right)^2} = \left(\overline{\frac{1}{1-i}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\overline{1-i}}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 = \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{1-1+2i} = \frac{1}{2i} = \boxed{-\frac{i}{2}}$$

$$3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt3}{2}i}$$

3) $0 \le x \le \pi$

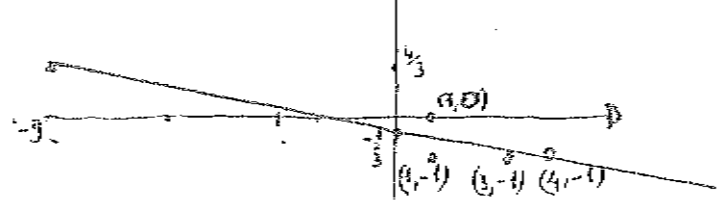
$y = \cos x$




4) Posto $X=(1,1,3,4)$, $Y=(-1,0,-1,-1)$ la retta di regressione è data da $y = \frac{cov(X,Y)}{VarX}(x-\langle X\rangle) + \langle Y\rangle$

| | | $\langle X \rangle$ | VarX | cov |
|---|---|---|---|---|
| X | 1 1 3 4 | 9/4 | 27/16 | −5/16 |
| Y | −1 0 −1 −1 | $\langle Y \rangle$ = −3/4 | | |

$$y = -\frac{5}{16}\Big/\frac{27}{16}\cdot x - \left(-\frac{5}{16}\right)\Big/\frac{27}{16}\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{27}x + \frac{5}{12} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{27}x - \frac{4}{12} = -\frac{5}{27}x - \frac{1}{3}$$



5) a. Sia $C$ la variabile aleatoria che dà il numero di individui catturati. Se $p$ è la probabilità che il singolo individuo sia catturato si ha che $C$ ha distribuzione Binomiale $(1000, p)$ ritenendo indipendenti la cattura di uno dall'altro.

$$\mathbb{P}(C=k) = \binom{1000}{k} p^k (1-p)^k \quad e \quad \langle C \rangle = 1000\,p$$

ma per ipotesi $\langle C \rangle = \frac{5}{1000} \cdot 1000 = 5$ quindi $p = \frac{5}{1000}$

Per cui $\mathbb{P}(C=k) = \binom{1000}{k} \left(\frac{5}{1000}\right)^k \left(\frac{995}{1000}\right)^{1000-k}$

b. Sia $N$ la variabile aleatoria che dà il numero di tentativi prima di aver catturato un individuo almeno, se $C_1, C_2, C_3, \ldots$ sono le v.a. indipendenti che danno il numero di individui catturati in successivi tentativi si ha

$$\{N = n\} = \{C_1 = 0,\ e\ C_2 = 0,\ \ldots,\ e\ C_{n-1} = 0,\ e\ C_n \gneq 0\}$$

$$\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{P}(C_1=0) \ldots \mathbb{P}(C_{n-1}=0)\, \mathbb{P}(C_n \gneq 0) =$$
$$= \mathbb{P}(C=0)^{n-1} \left(1 - \mathbb{P}(C=0)\right) = q^{n-1}(1-q)$$

$q = \mathbb{P}(C=0) = \left(\frac{995}{1000}\right)^{1000}$ [DISTRIBUZIONE GEOMETRICA MODIFICATA]

$$\langle N \rangle = \sum_{n \geq 1} n\, \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n \geq 1} n\, q^{n-1} (1-q) =$$
$$= (1-q) \sum_{n \geq 1} n\, q^{n-1} = (1-q) \frac{d}{dq} \sum_{n \geq 0} q^n =$$
$$= (1-q) \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = (1-q) \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q} =$$
$$= \frac{1}{1-\left(\frac{995}{1000}\right)^{1000}} < \frac{1}{1-\left(\frac{999}{1000}\right)^{1000}} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000}} \lesssim \frac{1}{1-\frac{1}{e}} =$$
$$= \frac{e}{e-1} \leq \frac{2{,}8}{1{,}7} \lesssim 1.65$$

c. Sia $M$ la v.a. che dà il numero di individui marcati e catturati. La probabilità che un singolo individuo marcato sia catturato è sempre $\frac{5}{1000}$. Per cui $M$ è Binomiale di parametri $\left(60, \frac{5}{1000}\right)$.

$$\mathbb{P}(M=h) = \binom{60}{h} \left(\frac{5}{1000}\right)^h \left(\frac{995}{1000}\right)^{60-h}$$

6 a. $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ $\quad f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$

quindi $f$ è crescente ed invertibile, $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$

- La tangente al grafico dell'inversa $f^{-1}(x)$ in $(1,0)$ $(f^{-1}(1) = 0)$ è data da

$$y = \frac{df^{-1}}{dx}(1)(x-1) + f^{-1}(1) .$$

ora $\frac{df^{-1}}{dx}(f(t)) = \frac{1}{\frac{df}{dt}(t)}$ quindi $\frac{df^{-1}}{dx}(1) \underset{f(0)=1}{=} \frac{1}{f'(0)} = 1$

$$y = x - 1$$

- Oppure: la tangente alla funzione inversa in $(1,0)$ è la simmetrica rispetto a $y=x$ della tangente alla funzione in $(0,1)$ [essendo i grafici simmetrici]

questa è $\quad y = f'(0)(x-0) + f(0) = x+1$

per cui la tangente cercata è $\quad y = x - 1$

b. Per prima cosa si verifica che il punto $(-1,-1,-1)$ appartiene alla regione determinata da $xy^2z^3 = 1$

$(-1)(-1)^2(-1)^3 = (-1)^6 = 1$

Quindi si controlla che nel punto il gradiente della funzione il cui livello è la regione, non sia nullo

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^3)\Big|_{x=y=z=-1} = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2z^3)\Big|_{x=y=z=-1} = -2$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^3)\Big|_{x=y=z=-1} = -3$$

l'equazione del piano cercato è quindi

$$(-1)(x-(-1)) + (-2)(y-(-1)) + (-3)(z-(-1)) = 0$$

$$x + 2y + 3z + 6 = 0$$

7. $\displaystyle\int f(x,y,z)\, dS = \begin{bmatrix} \text{essendo la superficie di grafico} \\ \text{di } g(x,y) = x^2+y^2-1 \text{ su } x^2+y^2 \leq 1 \\ x,y>0 \end{bmatrix} =$

$S = \{(x, y, x^2+y^2-1) : x^2+y^2 \leq 1,\ x,y>0\}$

$$= \iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1 \\ x,y>0}} f(x,y,x^2+y^2-1)\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy = \iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1 \\ x,y>0}} \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2-1+\frac{5}{4}}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\,dy$$

$$= \iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1 \\ x,y>0}} 2|x|\cdot|y|\, dx\,dy = \begin{bmatrix} \text{coordinate polari } \begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{matrix} & \begin{matrix} dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\varphi \\ 0\leq\varphi\leq \pi/2 \quad 0<\rho\leq 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 2\rho^2|\cos\varphi||\sin\varphi|\, d\rho\right)d\varphi = \int_0^{\pi/2}|\cos\varphi||\sin\varphi|\, d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^2\, 2\rho\, d\rho$$

$$= [t=\rho^2 \quad dt = 2\rho\, d\rho] \int_0^{\pi/2}|\cos\varphi||\sin\varphi|\, d\varphi \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}|\cos\varphi||\sin\varphi|\, d\varphi =$$

$$= 1/2\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi = \begin{bmatrix} \sin\varphi = y \\ \cos\varphi\, d\varphi = dy \\ 0\leq y\leq 1 \end{bmatrix} 1/2\int_0^1 y\, dy = \frac{1}{4}$$

8 a Siano $T_1$ e $T_2$ i "tempi di morte" indipendenti dei due microorganismi $(T\leq t) = (T_1 \leq t \text{ e } T_2\leq t)$

quindi $\mathbb{P}(T\leq t) = \mathbb{P}(T_1\leq t)\cdot\mathbb{P}(T_2\leq t)$ indipendenza $=$

$= \mathbb{P}(T_1\leq t)^2$ egualmente distribuiti $= \begin{cases}(1-e^{-t})^2 & \text{se } t\geq 0 \\ 0 & \text{se } t\leq 0\end{cases}$

Ora per $t>0$ $\exists \frac{d}{dt}\mathbb{P}(T\leq t) = 2(1-e^{-t})e^{-t}$ continua

quindi per $t>0$ $\mathbb{P}(T\leq t) = \int_0^t 2(1-e^{-s})e^{-s}\, ds$

inoltre per $t\leq 0$ $0 = \mathbb{P}(T\leq t) = \int_0^t 0\, ds$ per cui

$f(t) = \begin{cases}2(1-e^{-t})e^{-t} & t>0 \\ 0 & t\leq 0\end{cases}$ è la densità $\mathbb{P}(T\leq t) = \int_0^t f(s)\, ds$

b $\langle e^T\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^s f(s)\, ds = \int_0^{\infty} 2\cancel{e^s}(1-e^{-s})\cancel{e^{-s}}\, ds =$

$= 2\int_0^{\infty}(1-e^{-s})\, ds = 2\int_0^{\infty} ds - 2\int_0^{\infty} e^{-s}\, ds =$

$= +\infty - 2 = +\infty$