MATEMATICA PER BIOTECNOLOGIE

IV Appello, straordinario, 12 Novembre 2010

1. Il cammino $t \mapsto (t, 2t, 3t)$ percorre la retta per l'origine e $(1,2,3)$

La retta ortogonale al piano $x+y+z=1$ cioè $x+y+(z-1)=0$ cioè $(x,y,z-1)\cdot(1,1,1)=0$ è quella per l'origine e $(1,1,1)$

Il coseno dell'angolo di incidenza tra le due rette (che si intersecano in $(0,0,0)$) è

$$\cos\left(\widehat{(111)(000)(123)}\right) = \frac{(1,1,1)\cdot(1,2,3)}{|(1,1,1)|\,|(1,2,3)|} = \frac{1+2+3}{\sqrt{3}\,\sqrt{1+4+9}} =$$

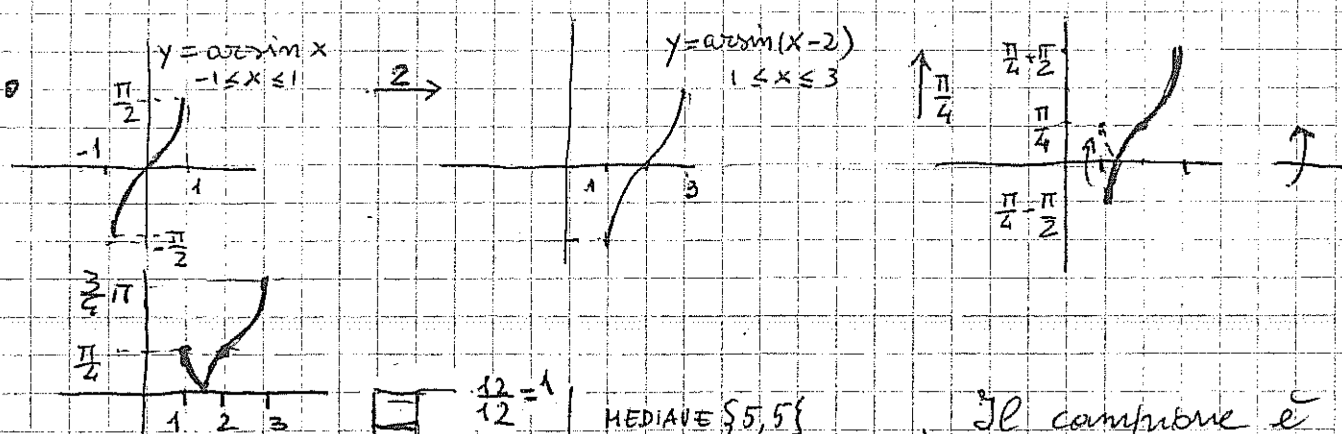
$$= \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$$

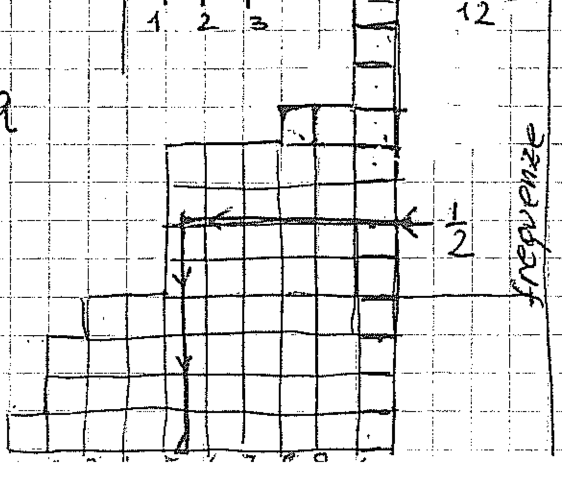
2. $$\overline{\left(\frac{1}{3-i}\right)^2} = \left(\frac{1}{\overline{3-i}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3+i}\right)^2 = \frac{1}{(3+i)^2} = \frac{1}{9-1+6i} = \frac{1}{8+6i}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{4+3i} = \frac{1}{2}\,\frac{4-3i}{|4+3i|^2} = \frac{1}{2}\,\frac{4-3i}{16+9} = \frac{1}{50}(4-3i) =$$

$$= \frac{2}{25} - \frac{3}{50}i$$

$$e^{1+i\frac{\pi}{6}} = e\,e^{i\frac{\pi}{6}} = e\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{e\sqrt{3}}{2} + \frac{e}{2}i$$

3. 

4a 

MEDIANE $\{5,5\}$

MODA $= 5$ CON frequenza $\frac{1}{3}$

4b Il campione è

1, 2, 2, 3, 5, 5, 5, 5, 8, 10, 10, 10

MEDIA $\dfrac{1+4+3+20+8+30}{12} = \dfrac{11}{2}$

VARIANZA $= \dfrac{1+8+9+100+64+300}{12} - \dfrac{121}{4} =$

$$= \frac{482}{12} - \frac{363}{12} = \frac{119}{12} \sim 9.9$$

5 Si assume che il sesso di un figlio è indipendente da quello di eventuali altri, e che con equal probabilità si ha un figlio di un sesso o dell'altro:

a _ calcolare la probabilità che in una famiglia con 3 figli tutti siano maschi sapendo che almeno uno è maschio

conviene usare la nozione più elementare di probabilità =

$$= \frac{\#\text{ CASI FAVOREVOLI}}{\#\text{ CASI POSSIBILI}}$$

i casi sono dati dalle terne ordinate (sesso 1° figlio, sesso 2° figlio, sesso 3° figlio)

Maschio Femmina, che hanno almeno una M

(M, M, M) (M, F, M) (M, M, F) (M, F, F)
(F, F, M) (F, M, F) (F, M, M)

Quindi la probabilità è $\frac{1}{7}$

b _ gli eventi avere una femmina su 3 figli e avere un maschio su 3 figli sono indipendenti?
(avere almeno un ---)

conviene usare lo schema di Bernoulli

$X = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ $P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$ (ipotesi) $X = 0 \sim$ Femmina, $X = 1 \sim$ Maschio

X_1 e X_2 e X_3 distribuite come X e indipendenti (ipotesi)

avere almeno uno dei tre figli femmina $\sim X_1 + X_2 + X_3 \lneq 3$

avere almeno un dei tre figli maschio $\sim X_1 + X_2 + X_3 \gneq 0$

Quindi bisogna verificare se

P(avere almeno un maschio e almeno una femmina) =
= P(avere almeno un maschio) P(avere almeno una femmina)

Ora P(avere almeno un maschio) = P(avere almeno una femmina)
in quanto $P(X_1=0) = P(X_1=1)$

$P(0 \lneq X_1+X_2+X_3 \lneq 3) = P(X_1+X_2+X_3 = 1 \text{ o } = 2) =$ (incompatibili)

$= P(X_1+X_2+X_3=1) + P(X_1+X_2+X_3=2) =$ (Binomiale) $\binom{3}{1}\frac{1}{8} + \binom{3}{2}\frac{1}{8} =$

$= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$P(X_1+X_2+X_3 \gneq 0) = P(X_1+X_2+X_3 = 1 \text{ o } = 2 \text{ o } = 3) =$ (incompatibili)

$= P(X_1+X_2+X_3 = 1 \text{ o } = 2) + P(X_1+X_2+X_3=3) = \frac{3}{4} + \binom{3}{3}\frac{1}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$\frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \neq \frac{3}{4}$.

8. $y''(t)+2y'(t)+10y(t)=\cos 3t$: omogenea $z''(t)+2z'(t)+10z(t)=0$

$\lambda^2+2\lambda+10=0 \quad \lambda=-1\pm 3i$

$z(t)=ae^{-t}\cos 3t+be^{-t}\sin 3t$

Particolare X del tipo $\alpha\cos 3t+\beta\sin 3t$ (termine noto $e^{0t}(A\cos 3t+B\sin 3t)$, $0+3i$ non è radice)

metodo delle costanti indeterminate

$X=\alpha\cos 3t+\beta\sin 3t$

$X'=-3\alpha\sin 3t+3\beta\cos 3t$

$X''=-9\alpha\cos 3t-9\beta\sin 3t$

$-9\alpha\cos 3t-9\beta\sin 3t-6\alpha\sin 3t+6\beta\cos 3t$
$+10\alpha\cos 3t+10\beta\sin 3t=\cos 3t$

per $t=0 \quad \alpha+6\beta=1$

per $t=\frac{\pi}{2} \quad \beta-6\alpha=0\to\beta=6\alpha \nearrow \alpha=\frac{1}{37}\searrow\beta=\frac{6}{37}$

Quindi $y(t)=ae^{-t}\cos 3t+be^{-t}\sin 3t+\frac{1}{37}\cos 3t+\frac{6}{37}\sin 3t$

9. Sia X variabile aleatoria con densità $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$

(in effetti $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{artg}x\Big]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$; $P(X\in A)=\int_A\frac{dx}{\pi(1+x^2)}$)

a. Per quali $a\in\mathbb{R}$: $Y=|X|^a$ ha media finita?

Poiché in generale se Z ha densità $f(z)$, nel caso in cui $\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f(z)dz<+\infty$, si pone $\langle Z\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}zf(z)dz$

e si ha, nel caso $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(z)|f(z)dz<+\infty$, $\langle g(Z)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}g(z)f(z)dz$

per rispondere vanno trovati gli $a\in\mathbb{R}$ per cui

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|^a}{1+x^2}dx<+\infty$ essendo l'integrando pari $\int_0^{+\infty}\frac{|x|^a}{1+x^2}dx<+\infty$

ovvero $\lim_{c\to+\infty}\int_0^c\frac{|x|^a}{1+x^2}dx<+\infty$ ovvero $\lim_{c\to+\infty}\int_1^c\frac{x^a}{1+x^2}dx<+\infty$

poiché $\frac{x^{a-2}}{2}\leq\frac{x^{a-2}}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{x^a}{1+x^2}\leq x^{a-2}$ se $x\geq 1$, equivale

a trovare $a\in\mathbb{R}$ per cui $\int_1^{+\infty}x^{a-2}dx<+\infty$ cioè $a-2<-1$

cioè $a<1$.

b. Sia $Z=(X,Y)$ poiché X e Y sono indipendenti Z ha densità

$\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$: $\mathbb{P}(X-Y<0)=P(Z\in\{(x,y):x-y<0\})=$

$=\iint_{x<y}\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\left(\int_x^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}\right)dx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{artg}x\right)\frac{1}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{artg}x(\operatorname{artg}x)'dx=\frac{1}{2}-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}ydy=\frac{1}{2}$

6 a. retta tangente al grafico di $y=f(x)$ in (x_0, y_0)

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

$f(x) = \dfrac{e^{\sin x}}{\cos x}$ $\quad x_0 = 0 \quad f(x_0) = 1 = y_0$

$$f'(x) = \frac{\cos x\, e^{\sin x} \cos x - e^{\sin x}(-\sin x)}{\cos^2 x} \qquad f'(0) = 1$$

$$y = x + 1$$

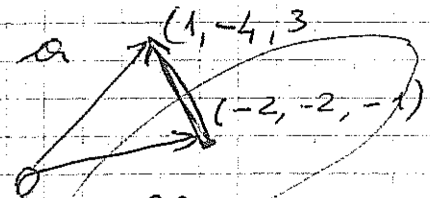
b. $A = \{(x,y,z) : x + y^2 + z^3 = 1\} \ni (-2,-2,-1)$

poiché $-2+4-1 = 1$

$$\nabla(x+y^2+z^3) = (1, 2y, 3z^2)$$

nel punto $(-2,-2,-1)$ vale $(1,-4,3) \neq (0,0,0)$

quindi A in $(-2,-2,-1)$ ha piano tangente passante per tale punto e ortogonale a $\nabla(x+y^2+z^3)\big|_{(-2,-2,-1)} = (1,-4,3)$



che avrà equazione (prodotto scalare nullo come condizione di ortogonalità)

$$(x+2)\cdot 1 + (y+2)\cdot(-4) + (z+1)\cdot 3 = 0$$

$$x - 4y + 3z = 3$$

7 La superficie immagine di $(x,y) \mapsto (x, y, x^2+y^2-1)$ $\quad x^2+y^2 \le 1$ è il grafico di $f(x,y) = x^2+y^2-1$ su $x^2+y^2 \le 1$

Area grafico su $x^2+y^2\le 1$ $= \displaystyle\iint_{\{(x,y)\, x^2+y^2\le 1\}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\, dx\,dy =$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\,dy \underset{\substack{\text{coordinate polari} \\ dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\theta \\ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2}}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\, \rho\, d\rho \underset{\substack{0\le z=\rho^2\le 1 \\ dz = 2\rho\, d\rho}}{=} \pi \int_0^1 \sqrt{1+4z}\, dz \underset{\substack{u = 4z \\ du = 4dz \\ 0\le u\le 4}}{=}$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^4 \sqrt{1+u}\, du = \frac{\pi}{4}\,\frac{2}{3}\left[(1+u)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right)$$