ESERCIZIO n. 1 Si calcolino le coordinate della proiezione ortogonale di $(1, 1, 1)$ sul piano $x - y + z = 2$.

ESERCIZIO n.2 Si risolva in $\mathbf{C}$ l'equazione $z^3 - i = 0$.

ESERCIZIO n. 3 Si tracci il grafico di $\log|x - 1| - 1$.

ESERCIZIO n. 4 Dati i campioni ordinati $X = (2, 1, 3, -2)$ ed $Y = (-1, 2, 1, -2)$ si traccino: la retta di regressione $y = mx + c$ e i punti del piano corrispondenti ai dati.

• ESERCIZIO n. 5 In un urna ci sono 66 palline numerate come segue: una con 11, due con 10, tre con 9, ..., undici con 1. Ne estraggo una. Con che probabilità si estrae un numero k? Qual'è il valore medio del numero che ottengo?

• ESERCIZIO n.6 a- Si calcoli lo sviluppo di Taylor di $e^{\sin x}$ di centro 0 ed ordine 3.
b- Si determini l'equazione del piano tangente in $(1, 2, 1)$ alla superficie parametrica immagine di $(st, s^2 + t^2, e^{t-s})$, $0 \leq s,\ t$.

ESERCIZIO n.7 Calcolare l'area della superficie di rotazione attorno all'asse verticale del grafico $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq 1$.

ESERCIZIO n.8 Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + 4y(t) = \sin 2t$$

• ESERCIZIO n.9 Le variabili aleatorie X ed Y hanno rispettivamente: X distribuzione uniforme su $[0, 1]$, ed Y distribuzione $P(Y \leq t) = \frac{t}{1+t}$ per $t \geq 0$ altrimenti 0. Calcolare il valor medio di $X + Y$.

Matematica per Biotecnologie A.A. 2009/2010

V appello ordinario 14 Febbraio 2011

1. La proiezione ortogonale al piano $x-y+z=2$ del punto di coordinate $(1,1,1)$ è l'intersezione della retta passante per $(1,1,1)$ con direzione ortogonale al piano $x-y+z=2$
conviene considerare questo cammino

$$t \mapsto (1,1,1)+t(1,-1,1) = (1+t,\ 1-t,\ 1+t)$$

per rappresentare la retta essendo $(1,-1,1)$ il vettore dei coefficienti del piano ortogonale al piano

quindi le coordinate dell'intersezione devono verificare

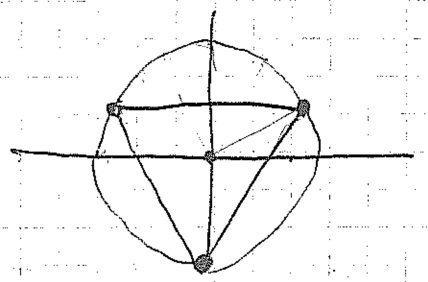
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \\ x-y+z=2 \end{cases} \qquad 1+t-(1-t)+1+t=2 \qquad 3t=1 \qquad t=\frac{1}{3}$$

Le coordinate della proiezione sono

$$\boxed{\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)} \qquad \frac{2}{3}(2,1,2)$$

2. $z^3 - i = 0 \qquad z^3 = i \qquad z^3 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$

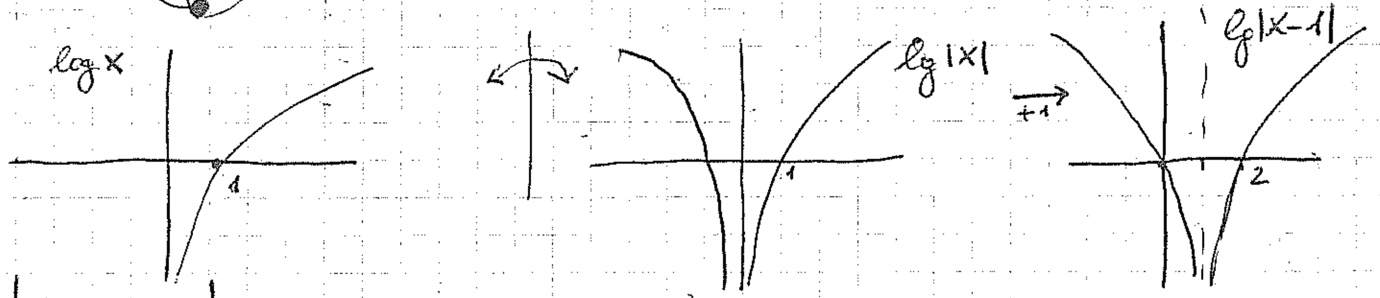
$$\begin{cases} 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases} \qquad \underset{k=0}{\theta = \frac{\pi}{6}},\ \underset{k=1}{\frac{5}{6}\pi},\ \underset{k=2}{\left(\frac{9}{6}\pi\right) \frac{3}{2}\pi}$$

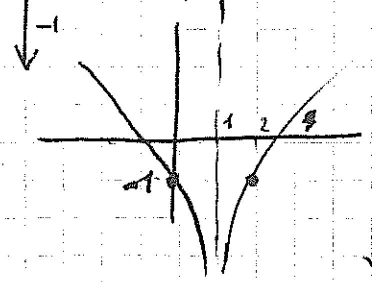


$$\boxed{z_i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ -i}$$

oppure: visto che $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ è soluzione $z^3 = i$
le altre sono i vertici del triangolo equilatero a partire da $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

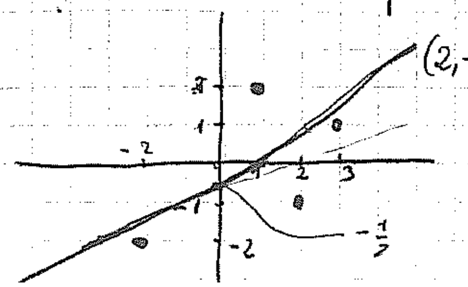
3





4

					$\langle X \rangle$	V_x	corr
X	2	1	3	-2	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{4}$
Y	-1	2	1	-2	0	$\frac{5}{2}$	
					$\langle Y \rangle$	V_Y	



$(2,-1)\ (1,2)\ (3,1)\ (-2,-2)$

$$y - \langle Y \rangle = \frac{\text{corr}}{V_x}(x - \langle X \rangle)$$

$$y = \frac{x-1}{2} \qquad y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

5 $\quad \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\#\text{ casi favorevoli}}{\#\text{ casi possibili}} =$

$$= \frac{\text{numero delle palline con il numero } k}{\text{numero totale delle palline}} = \begin{cases} 0 & k \le 0 \\ \dfrac{11-k+1}{66} & 1 \le k \le 11 \\ 0 & k \ge 12 \end{cases}$$

												N° palline	
k =	11											1	= 11 − 10
k =	10	10										2	= 11 − 9
k =	9	9	9									3	= 11 − 8
k =	8	8	8	8								4	= 11 − 7
	7	7	7	7	7							5	= 11 − 6
	6	6	6	6	6	6						6	= 11 − 5
	5	5	5	5	5	5	5					7	= 11 − 4
	4	4	4	4	4	4	4	4				8	= 11 − 3
	3	3	3	3	3	3	3	3	3			9	= 11 − 2
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		10	= 11 − 1
k =	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	= 11 − 0
												66	

$\boxed{11-(k-1)}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1+ & 2+ & 3+ & 4+ & 5+ & 6+ & 7+ & 8+ & 9+ & 10+ & 11 \\ 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \end{array} = \frac{11\cdot 12}{2}$$

$$\langle X \rangle = \sum_{k=1}^{11} k\, \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{11} k\, \frac{12-k}{66} = \sum_{k=1}^{11} k\left(\frac{2}{11} - \frac{k}{66}\right)$$

$$= \frac{2}{11}\sum_{k=1}^{11} k - \frac{1}{66}\sum_{k=1}^{11} k^2 = \frac{2}{11}\cdot 66 - \frac{1}{66}\,(1+4+9+16+25+36+49+64+81+100+121)$$

$$= 12 - \frac{506}{66} = 12 - \frac{253}{33} = \frac{396-253}{33} = \boxed{\frac{143}{33}} \gtrsim 4$$

6a $\quad e^{\sin x} \qquad y = \sin x \quad \sin 0 = 0 \quad y = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) = O(x)$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + O(y^4) \qquad O(y^4) = O(x^4)$$

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)^3}{6} + O(x^4)$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{6}\right) + O(x^4)$$

$$= \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^4)}$$

6bI $\quad (s,t) \overset{\vec{g}}{\mapsto} (st,\, s^2+t^2,\, e^{t-s})$ per $s,t \ge 0$ è iniettiva

infatti se $x = st$ e $y = s^2+t^2$ $\quad 2x+y = (s+t)^2$, $\; z = e^{t-s}$ $\quad t-s = \lg z$

$\sqrt{2x+y} = s+t$

quindi $s = \dfrac{\lg z - \sqrt{2x+y}}{2}$ $\quad t = \dfrac{\lg z + \sqrt{2x+y}}{2}$. Essendo le funzioni derivabili

ho piano tangente generato dai vettori $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial s}$, $\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial t}$

Il punto $(1,2,1)$ sta sulla superficie $\begin{cases} 1 = st \\ 2 = s^2+t^2 \\ 1 = e^{t-s} \\ t, s \geq 0 \end{cases}$, $t-s=0$

ha soluzione $s=t=1$

Inoltre per $s^2+t^2 >> 1$ la superficie non può avvicinarsi al punto $(1,2,1)$.

Quindi l'equazione del piano ad esso tangente in $(1,3,1)$ è

$$\left((x,y,z)-(1,2,1)\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}(1,1) \wedge \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}(1,1)\right) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial s}(1,1) = (t, 2s, -e^{t-s})_{t=s=1} = (1,2,-1)$$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t}(1,1) = (s, 2t, e^{t-s})_{t=s=1} = (1,2,1)$$

cioè

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & 2 & 2 \\ z-1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

cioè (il determinante non cambia sommando ad una colonna il multiplo di un'altra)

$$\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 2 & 2 \\ z & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

6 b II $\quad 4x-2y=0 \quad$ cioè $\boxed{2x-y=0}$

Altra soluzione

$x = st$

$y = s^2+t^2$

$z = e^{t-s} \qquad \lg z = t-s \qquad (\lg z)^2 = t^2+s^2-2st = y-2x$

la superficie è contenuta nel luogo di zeri

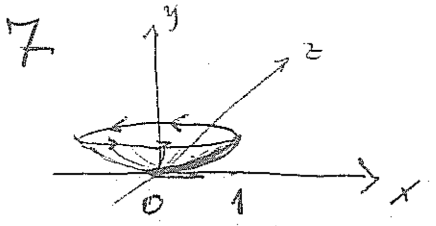
$-2x+y-(\lg z)^2 = 0 \qquad f(x,y,z)=0 \qquad \nabla f(1,2,1) = \left(-2, 1, -\frac{2\lg z}{z}\Big|_{z=1}\right) =$

$= (-2,1,0) = 0$

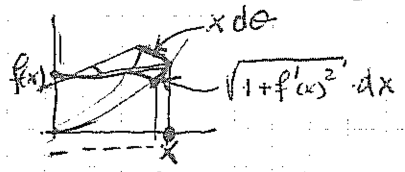
quindi il piano tangente ortogonale a $(-2,1,0)$ e passante per $(1,2,1)$

$-2(x-1)+1(y-2)+0\cdot(z-1)=0 \quad . \quad -2x+y=0 \qquad \boxed{2x-y=0}$

7



Formula dell'area di rotazione del grafico $y=f(x)$ attorno all'asse y, $0\le x\le 1$



$$A = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

nel caso $y=\frac{x^2}{2}$ $\quad f'(x)=x$

$$A = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx \underset{\substack{t=x^2\\ 0\le t\le 1\\ dt=2x\,dx}}{=} \pi\int_0^1\sqrt{1+t}\,dt =$$

$$= \pi\int_0^1 (1+t)^{\frac12}dt = \pi\left[\frac23(1+t)^{\frac32}\right]_0^1 = \frac23\pi\, 2^{\frac32} - \frac23\pi =$$

$$= \frac43\sqrt2\,\pi - \frac23\pi = \frac23\pi\left(2^{\frac32}-1\right) = \frac{\pi}{3}\left(4\sqrt2-2\right).$$

8) $y''(t)+4y(t)=\sin 2t$ $\quad$ i) omogenea $\lambda^2+4=0$ $\quad \lambda=\pm 2i$

$z(t) = a\cos 2t + b\sin 2t$

ii) particolare essendo il termine noto soluzione dell'omogenea si cercheranno soluzioni del tipo

$$t\,(a\cos 2t + b\sin 2t) = \varphi(t)$$
$$a\cos 2t + b\sin 2t + t z' = \varphi'(t)$$
$$-2a\sin 2t + 2b\cos 2t + z' + tz'' = -4a\sin 2t + 4b\cos 2t + tz'' = \varphi''(t)$$

imponendo $\varphi''(t)+4\varphi(t)=\sin 2t$ si ottiene

$$-4a\sin 2t + 4b\cos 2t = \sin 2t \quad \text{per ogni } t$$

$-4a = 1 \qquad t=\frac{\pi}{2} \qquad a=-\frac14$

$4b = 0 \qquad t=0 \qquad b=0$

$\varphi(t) = -\frac{t}{4}\cos 2t$

$$\boxed{y(t) = \left(a-\frac{t}{4}\right)\cos 2t + b\sin 2t}$$

9) $\mathbb{P}(X\le a) = \begin{cases} 0 & a\le 0\\ a & 0\le a\le 1\\ 1 & a\ge 1\end{cases} = \int_{-\infty}^{a}\chi_{[0,1]}(x)\,dx$ $\quad$ DENSITÀ $X = \chi_{[0,1]}(x)$

$\mathbb{P}(Y\le t) = \begin{cases}\frac{t}{1+t} & t\ge 0\\ 0 & t\le 0\end{cases} = \begin{cases}1-\frac{1}{1+t} & t\ge 0\\ 0 & t\le 0\end{cases} = \begin{cases}\int_0^t \frac{dy}{(1+y)^2} & t\ge 0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$

$= \int_{-\infty}^{t}\chi_{[0,+\infty[}(y)\,\frac{1}{(1+y)^2}\,dy$ $\quad$ DENSITÀ $Y = \begin{cases}\frac{1}{(1+y)^2} & y\ge 0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

Ora $\langle X+Y\rangle = \langle X\rangle + \langle Y\rangle$ ha senso poiché $\mathbb{P}(Y\ge 0)=\mathbb{P}(X\ge 0)=1$ e quindi $\langle X\rangle\ge 0$ e $\langle Y\rangle \ge 0$. In particolare

$$\langle X+Y\rangle \ge \langle Y\rangle = \int_0^{+\infty}\frac{y}{(1+y)^2}\,dy = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+y}-\frac{1}{(1+y)^2}\right)dy = \left[\lg(1+y)+\frac{1}{1+y}\right]_0^{\infty} = \boxed{+\infty}$$