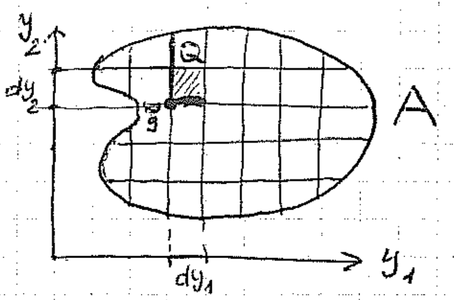
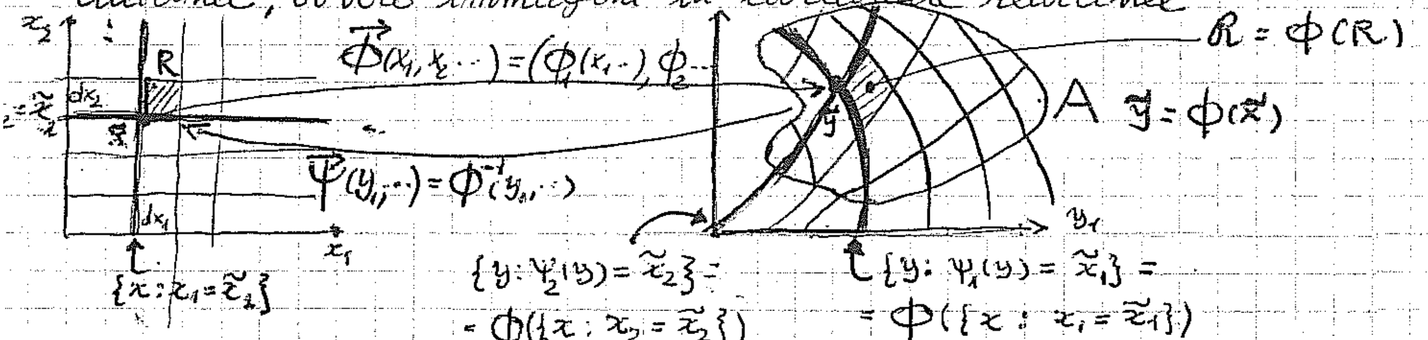
Considerazioni intuitive sul cambiamento di variabili per gli integrali multipli non orientati e di superficie.

In certi casi può essere comodo, invece di pensare l'integrale

$$\int_A f(y_1, y_2, \dots)\, dy_1 dy_2 \dots \quad \sim \quad \sum_Q f(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2 \dots) \cdot$$ volume del parallelepipedo Q con spigoli paralleli agli assi di lunghezze "infinitesime" dy_1, dy_2 . . .



"reticolare" il dominio con ipersuperficie curve, che sono gli insiemi di livello di un nuovo sistema di coordinate non rettilinee, ovvero immagini di coordinate rettilinee



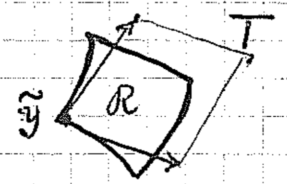
quindi pensare l'integrale nel modo seguente:

$$\int_A f(y_1, \dots)\, dy_1 \dots \quad \sim \sum_{\mathcal{R}} f(\tilde{y}_1, \dots)$$ volume parallelepipedo "curvilineo" $\mathcal{R}$ trasformato nello "spazio delle y" di quello "rettilineo" nello "spazio delle x" R

Infine approssimare i volumi "curvi" con quelli dei parallelepipedi tangenti T in $\tilde{y}$, che hanno spigoli "infinitesimi"

$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_1}(\tilde{x}) \cdot dx_1$, $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_2}(\tilde{x})\, dx_2$ . . .

$$\mathrm{Vol}\, T = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \right| dx_1 dx_2 \dots$$



$$\int_A f(y)\, dy \sim \sum_T f(\tilde{y}) \left|\det \dots\right| dx_1 \dots$$

ritornando agli integrali si avrà:

$$\int_A f(y_1, y_2, \dots)\, dy_1 dy_2 \dots = \int_{\Phi^{-1}(A)} f(\phi_1(x), \phi_2(x), \dots) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \right| dx_1 dx_2 \dots$$

ESEMPIO $\Phi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ $\quad \mathrm{Vol}\, T = \rho\, d\rho\, d\theta$ $\quad \int f(y)\, dy = \int f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta$

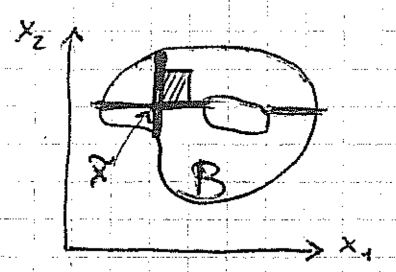
In modo analogo al teorema illustrato ci si può convincere della seguente definizione

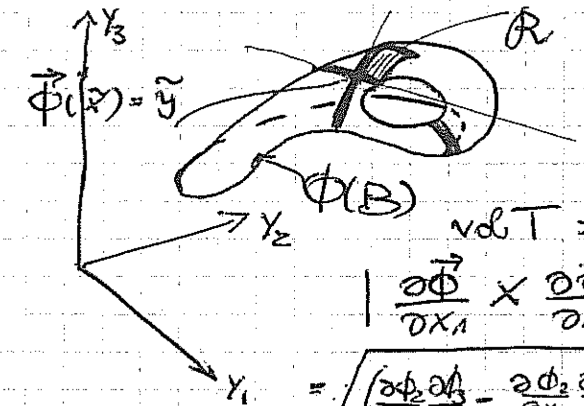
Definizione Sia $\Phi : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

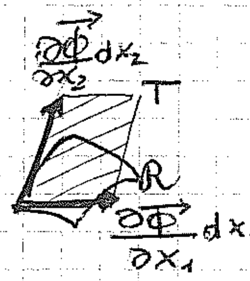
$\vec{\Phi}(x_1, x_2) = (\phi_1(x_1,x_2), \phi_2(x_1,x_2), \phi_3(x_1,x_2))$ una superficie parametrica (iniettiva)

$g(y_1, y_2, y_3)$ funzione continua

$$\int_{\Phi(B)} g \, d\Sigma \underset{def}{=} \int_B g(\phi_1(x_1,x_2), \dots) \left| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2$$







$$\text{vol}\, T = \left| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2 =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}\frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} \right)^2} \, dx_1 dx_2$$

In particolare

$$\text{Area}(\Phi(B)) = \int_B \left| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_1}(x_1,x_2) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2$$

<u>NOTA</u> Se Φ è un grafico $\Phi(x_1,x_2) = (x_1, x_2, f(x_1,x_2))$

$$\int_{\text{grafico di } f} g \, d\Sigma = \int_B g(x_1, x_2, f(x_1,x_2)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)^2} \, dx_1 dx_2$$

<u>NOTA</u> Come per gli integrali non orientati su cammini (iniettivi) l'elemento d'area

$$d\Sigma_\phi = \left| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2$$

non dipende da riparametrizzazioni della superficie

$\Phi(h_1(z_1,z_2), h_2(z_1,z_2)) =: \Psi(z_1, z_2) \qquad d\Sigma_\phi = d\Sigma_\psi$

<u>NOTA</u> Per figure di rotazione vi sono formule semplificate elencate negli appunti