Complementi di Analisi Matematica

Anno Accademico 2003-2004

Laurea specialistica in Informatica

R.Stasi, V.M. Tortorelli

IV prova scritta finale, 17 settembre 2004

I PARTE: si dia la risposta alle seguenti domande senza giustificazione:

1- Si calcoli la dimensione del nucleo $(x, y, z, w) \mapsto (x + y + z, y + z + w, z + w + x, z + 2w)$.

R.:

2- Dire se esiste il limite di $\dfrac{\tan(x^2 + y^2) + \cos^2 z - 1}{x^2 + y^2 + z^2}$ per $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$.

R.:

3- Si calcoli il massimo della funzione $x^2y^2z^2$ sull'insieme definito da $\sqrt{|x|}+2\sqrt{|y|}+3\sqrt{|z|} \leq 1$.

R.:

4- Si calcoli l'area della superficie ottenuta tracciando i segmenti congiungenti l'origine $(0, 0, 0)$ con i punti della curva $(t \cos t, t \sin t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

R.:

5- Dire se il seguente integrale generalizzato è finito: $\displaystyle\int_{x^2+y^2 \leq z^4} \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$.

R.:

6- Si trovino le soluzioni di: $u''(x) + u'(x) + u(x) = e^x,\ u(0) = u(1) = 0$

R.:

Complementi di Analisi Matematica
Anno Accademico 2003-2004
Laurea specialistica in Informatica
R.Stasi, V.M. Tortorelli

IV prova scritta finale, 17 settembre 2004

II PARTE: si risolvano i seguenti problemi dando in modo esauriente le opportune giustificazioni:

Sia $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto f(x,y)$ una funzione continua per cui per ogni $y \in \mathbf{R}$ $\exists \min\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x,y) := g(y)$ e sia $C(y) =: \{x : f(x,y) = g(y)\}$ l'insieme dei punti di minimo.

a: Si mostri (anche graficamente ed in modo qualitativo) un caso in cui, pur essendo f differenziabile infinite volte, la funzione g non risulti derivabile in qualche punto.

[Si consideri il sopragrafico di g in termini di quello di f]

b: Si provi che se $(x_n, y_n) \to (x,y)$, con $x_n \in C(y_n)$ allora $x \in C(y)$.

c: - Si provi che: $\mathrm{o}(1) \geq g(y+h) - g(y),$ per $h \to 0$

- se poi esiste $\frac{\partial f}{\partial y}$ si ha: $h \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \mathrm{o}(h) \geq g(y+h) - g(y),$ per $h \to 0,$ $x \in C(y)$

(*) d: Si supponga inoltre che $\bigcup\limits_{y\in K} C(y)$ sia limitato essendolo K.

- Si provi che g è continua;

[Ci si riduca ad usare sotto-successioni convergenti, ed il risultato del secondo punto]

- se poi vi è $\frac{\partial f}{\partial y}$ *continua* allora g ha derivata "in avanti" eguale al minimo di $\frac{\partial f}{\partial y}$ su $C(y)$:

$$\exists \left(\lim_{h\to 0^+} \tfrac{g(y+h)-g(y)}{h} :=\right) \frac{d^+}{dy} \min_x f(x,y) = \min_{x\in C(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

[Ci si riduca ad usare il terorema del valor medio, l'uniforme continuità di $\frac{\partial f}{\partial y}$ su limitati, il risultato del secondo punto e sottousuccesioni]

e: Si mostri, anche con una semplice esemplificazione grafica, che vi sono f differenziabili infinite volte per cui g non è continua ne a destra ne a sinistra.