Complementi di Analisi Matematica
V.M. Tortorelli
C.L.S. Informatica, A.A. 2003/04
Appunti della seconda parte della decima lezione: 7 aprile 2004

Lunghezza d'arco Richiamando le nozioni della sesta lezione si introduce per cammini C^1 a tratti, definiti su $[a;b]$, la nozione di parametro di *lunghezza d'arco* che parametrizza in modo non arbitrario l'immagine in funzione della lunghezza del percorso che si fa "allontanandosi" dal suo "punto iniziale"

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(x)|dx, \text{ si ha } 0 \leq s \leq \mathcal{L}(\gamma)$$

il cammino $\varphi : [0; \mathcal{L}(\gamma)] \mapsto \varphi(s)$ per cui $\gamma(t) = \varphi(s(t))$ è equivalente a γ e percorre la sua immagine con "velocità " in modulo unitaria: $\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \gamma'$ ma $\frac{ds}{dt} = |\gamma'|$.
Ciò è particolarmente significativo per quelle che si sono chiamate curve orientate: $\frac{d\varphi}{ds}$ da il versore tangente.
Insiemi semplicemente connessi Si ricorda la nozione introdotta nella sesta lezione che formalizza nel caso di sottoinsiemi del piano la nozione intuitiva di "non aver buchi". Un sottoinsieme C di $\mathbf{R}^n$ si dice *semplicemente connesso* se è connesso (per archi) e per ogni cammino chiuso a valori in C, $\gamma : t \in [a;b] \mapsto \gamma(t) \in C$ vi è

$\psi \in C([a;b]_t \times [0;1]_\lambda)$, $\psi(t,\lambda) \in C$, $\psi(t,0) = \gamma(t)$, $t \mapsto \psi(t,1)$ è costante,
$t \mapsto \psi(t,\lambda)$ è un cammino chiuso $(\psi(a,\lambda) = \psi(b,\lambda))$

intuitivamente: γ si deforma con continuità ad un punto *rimanendo in* C.
Operazioni con cammini e curve - Dati due cammini γ su $[a;b]$ e φ su $[\alpha;\beta]$ per cui $\gamma(b) = \varphi(\alpha)$ si definisce il cammino *giustapposizione o somma* dei due

$\gamma \oplus \varphi(t) = \gamma(t)$ per $t \in [a;b]$
$\gamma \oplus \varphi(t) = \varphi(t - b + \alpha)$ per $t \in [b; b + \beta - \alpha]$

- In maniera simile dato un cammino su $[a;b]$ si definisce il cammino *opposto* $\ominus\gamma(t) = \gamma(b + a - t)$
Si ha $(\gamma \oplus \varphi) \oplus (\ominus\varphi) = \gamma$, per cui si scriverà $\gamma \ominus \psi$ intendendo $\gamma \oplus (\ominus\psi)$ qualora sia definita.
- Queste operazioni sono compatibili con la relazione di equivalenza di cammini *orientati*: ovvero somme e opposti di cammini equivalenti sono equivalenti. Per questo motivo nella pratica spesso non conviene riparametrizzare il risultato su un unico intervallo ma mantenerlo definito a pezzi. Nella teoria queste operazioni si estendono a tali classi di equivalenza.
In particolare le classe dei cammini orientati chiusi (che iniziano da un prefissato punto) a valori in un dato insieme connesso per archi, con queste operazoni formano un *gruppo* (chiaramente non commutativo), che è indipendente dal punto di base prescelto (punti diversi sono collegati da un camino e dal suo opposto), chiamato gruppo dei lacci.
Omotopia di cammini con estremi fissati Due cammini γ e φ su $[a;b]$ a valori in A (connesso per archi), per cui $\gamma(a) = \varphi(a)$ e $\gamma(b) = \gamma(b)$, ovvero hanno lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale, si dicono *omotopi in* A se esiste

$\psi \in C([a;b]_t \times [0;1]_\lambda)$, $\psi(t,\lambda) \in A$, $\psi(t,0) = \gamma(t)$, $\psi(t,1) = \varphi(t)$
$t \mapsto \psi(t,\lambda)$ è un cammino con i prefissati estremi $(\psi(a,\lambda) = \gamma(a) = \varphi(a),\ \psi(b,\lambda) = \gamma(b) = \varphi(b))$

- Questa nozione si estende di equivalenza di cammini orientati in quanto: cammini equivalenti a cammini omotopi sono omotopi, e inoltre due cammini possono essere riparametrizzati in modo lineare e crescente affinchè abbiano lo stesso dominio.
Si osserva che due cammini sono omotopi in A se e solo se il cammino chiuso $\gamma \ominus \varphi$ è omotopo in A ad un cammino costante. In particolare un dominio A è semplicemente connesso se e solo se cammini con gli stessi estremi sono omotopi in A.
- L'omotopia in A risulta a sua volta una relazione di equivalenza tra (classi di equivalenza di) cammini orientati a valori in A. Inoltre giustapposizione e opposto di cammini omotopi sono omotopi al risultato rispettivo delle operazioni.
- Ne segue che in un dominio A connesso per archi l'equivalenza data dall'omotopia proietta il gruppo dei lacci su un gruppo relativamente più semplice daa studiare chiamato *primo gruppo di omotopia* dello spazio A in questione ed è uno strumento algebrico per studiare proprietà geometriche di A (e.g. un dominio semplicemente connesso ha primo gruppo di omotopia di un solo elemento, se un dominio piano ha primo gruppo di omotopia isomorfo ai numeri interi ha esattamente un "buco" etc.).

Integrazione orientata di campi ed 1-forme: lavoro Un concetto fondamentale in fisica è quello di lavoro di una forza lungo un cammino: l'idea intuitiva di "somma infinita" del prodotto tra la componente tangenziale di una *forza applicata in un punto p* per lo spostamento "infinitesimo" lungo la traiettoria $d\mathcal{L}(p)$ nello stesso punto.

Da un punto di vista matematico avanzato lo studio di proprietà geometriche tramite il gruppo dei lacci risultano spesso impegnative: estensioni del concetto di "lavoro lungo una curva" sono la base per studiare proprietà geometriche meno impegnative ma decisamente più maneggevoli da analizzare.

- Su $\mathbf{R}^n$ in prima istanza un *campo vettoriale* (vettori applicati in punti) su $C \subseteq \mathbf{R}^n$ è indotto da una funzione $f : C \to \mathbf{R}^n$ continua.
- Un cammino $\gamma \in C^1$ in $\mathbf{R}^n$ definisce in ogni punto $\gamma(t)$ della sua immagine un vettore tangente $\gamma'(t)$. Un cammino differenziabile con continuità individua un campo di vettori sulla sua immagine.
PROBLEMA: se in un aperto di $\mathbf{R}^n$ di $\mathbf{R}^n$ è definito un campo esiste una famiglia di curve che ricopre l'aperto e ognuna di esse ha come tangente il campo stesso?
- Se v è un campo su C, γ un cammino C^1 a tratti a valori in C e definito su $[a;b]$, si dice *lavoro di v su γ*:

$$\int_\gamma v =_{\text{def}} \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n v_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)dt = \int_\gamma \langle v(p), \tau(p) \rangle d\mathcal{L}(p)$$

NOTA: a v si può rimpiazzare il campo tangente a γ otteneuto dalla proiezione ortogonale di $v(p)$ su $\tau(p)$.
- Tenendo presente che le coordinate cartesiane permettono di identificare punti, vettori e funzionali lineari concettualmente diversa è la nozione di 1-*forma differenziale* su C che in prima istanza viene individuta da una funzione continua f da C in $(\mathbf{R}^n)^*$: $\quad p \mapsto \sum f_i(p)\mathbf{e}_i^*$. In tale contesto è comodo denotare $f(p)$ con f_p.
Analogamente si definisce l'integrale (il lavoro) di una 1-forma ω su C lungo un a cammino in C come l'integrale rispetto la lunghezza d'arco della funzione ottenuta applicando la forma nel punto al vettore unitario tangente alla curva nel punto

$$\int_\gamma \omega =_{\text{def}} \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)dt = \int_\gamma \omega_p(\tau(p))d\mathcal{L}(p)$$

Se si vuole identificando i vettori con spostamenti o velocità, in assenza di di sistemi di riferimento una forza non può che essere un funzionale lineare.
NOTA: l'integrazione di campi o forme lungo cammini si differenzia da quella di funzioni in quanto non è invariante rispetto all'inversione del cammino:

$$\int_{\ominus\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$$

mentre, come per l'integrale di funzioni, per l'integrale di forme vale $\displaystyle\int_{\gamma\oplus\varphi} \omega = \int_\gamma \omega + \int_\varphi \omega$
- Tipici esempi di campo vettoriale e di 1- forma differenziale sono il gradiente e la funzione differenziale di una funzione C^1 su un aperto $\quad \varphi : A \to \mathbf{R} : \quad x \in A \mapsto \nabla\varphi(x) \in \mathbf{R}^n, \quad x \in A \mapsto d\varphi_x \in (\mathbf{R}^n)^*$
- La 1-forma differenziale costantemente eguale alla i^a proiezione coordinata $\omega_x = \mathbf{e}_i^*$, *i.e.* $\omega_x(v_1, \dots v_n) = v_i$, viene indicata con dx_i: e questo è coerente con il fatto che l'applicazione lineare $x \mapsto x_i$ ha come differenziale in ogni punto se stessa.
Le n-funzioni che identificano una froma differenziale $(\omega_1, \dots \omega_n) \sim \omega$ non sono altro che i coefficienti della forma espressa come combinazione dei differenziali delle coordinate:

$$\omega_x = \omega_1(x)dx_1 + \ldots + \omega_n(x)dx_n$$

- D'altra parte fissato $x \in \mathbf{R}^n$ e un vettore v_x (un campo su un punto) per ogni funzione regolare in un intorno di x è definita $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial v_x}(x) = v_{x,1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \ldots v_{x,n}\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$. Quindi (indicata con δ_x la funzione di valutazione in $x : \delta_x f = f(x)$) un campo si identifica con "un'operatore di derivazione" puntulale, e i campi che danno in ogni punto i vettori coordinati con i rispettivi operatori di derivazione parziale nel punto:

$$v_x = v_{x,1}\delta_x\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots v_{x,n}\delta_x\frac{\partial}{\partial x_n}$$

Differenza tra funzioni e campi o forme. È bene osservare che sebbene a livello introduttivo si siano presentati i campi e le forme proprio come n-ple di funzioni i concetti sottointesi sono molto diversi: quando con le n-funzioni si intende un campo o una forma differenziale si considera una diversa legge di cambiamento di questa rappresentazione quando cambino in maniera generale le coordinate del dominio.
La situazione è analoga a quella di un n-pla di numeri che rappresenta sia un vettore che un funzionale lineare: la differente denotazione si caratterizza nel diverso modo in cui cambia la n-pla cambiando semplicemente in modo lineare le coordinate. [1]
- Nel caso in questione, invece di semplici cambiamenti di coordinate lineari, si considerano cambiamenti di coordinate C^1: si considera un A aperto di $\mathbf{R}^n$ e una sua "riparametrizzazione" $\Psi : y \in B \to \Psi(y) = x \in A$ una funzione C^1 bigettiva con inversa C^1, le nuove funzioni coordinate saranno appunto date $y = Y(x) = \Psi^{-1}(x)$.

---

[1] PROMEMORIA Gli elementi di $\mathbf{R}^n$ grazie alla sola struttura lineare rappresentano sia punti dello spazio che vettori (traslazioni). Grazie al prodotto scalare "cartesiano" (ovvero l'aver fissato una base) le n-ple inoltre rappresentano sia vettori che funzionali lineari (1-forme): $\omega(x_1,\dots x_n)=\omega(\mathbf{e}_1)x_1+\dots\omega(\mathbf{e}_n)x_n$, e quindi la n-pla $(\omega(\mathbf{e}_1),\dots\omega(\mathbf{e}_n))$ identifica univocamente la forma ω: in effetti $\omega=\sum\omega(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i^*$. Tale differenza di "denotazione" viene caratterizzata già dai cambiamenti di funzioni coordinate semplicemente lineari: ovvero se le nuove coordinate sono date da $x\mapsto y=Mx$ (essendo le colonne di M^{-1} gli elementi di $\mathbf{R}^n$ che danno il nuovo sistema di coordinate) la n-pla $a=(a_1\dots a_n)$ come vettore ha appunto nuove coordinate Ma mentre la 1-forma da essa individuata $x\mapsto\omega(x)=\sum a_i x_i$ come funzione delle nuove coordinate individua la n-pla ${}^tM^{-1}a$: $\omega(x)=\omega(M^{-1}Mx)$. (Si osserva che un cambiamento di coordinate da un sistema ortonormale ad un altro in $\mathbf{R}^n$, a cui è associata una matrice ortonormale $M^{-1}={}^tM$, ha la stessa azione sulla n-pla sia che venga intesa come vettore che come 1-forma)

Questo sistema di coordinate da in ogni punto di $x \in A$ una diversa base di vettori dello "spazio tangente" in x che nel caso è $\mathbf{R}^n$. Per maggior chiarezza si indichi la n-pla di $\mathbf{R}^n$ composta da zeri tranne che un 1 all'i^o posto con $\mathbf{e}_i$ se si pensa come vettore applicato in un punto di $x \in A$ e con f_i se si pensa come vettore applicato in un punto $y \in B$.

Nelle coordinate rispetto $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$ la nuova base è $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_1}(y), \dots \frac{\partial \Psi}{\partial y_n}(y)\right) = (d\Psi_y \mathbf{f}_1, \dots \Psi_y \mathbf{f}_n)$, che corrispondono alle "velocità " delle curve immagine mediante Ψ delle direzioni coordinate cartesiane in B parametrizzate linearmente: $t \mapsto y + t\mathbf{f}_i$.

- Una n-pla di funzioni ω definite in A se considerata come funzione si trasforma semplicemente in $y \mapsto \omega(\Psi(y))$. Quando si considera la n-pla di funzioni come forma differenziale la trasformazione *" diretta"* per la regola della catena sui differenziali $dx_i = d\Psi_i = \sum_j \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j} dy_j$ è

$$\omega_{\Psi(y)} = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i = \sum_j \left(\sum_i \omega_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j}\right) dy_j$$

in effetti come funzione lineare che agisce sulle nuove coordinate w si ottine semplicemente:

$$\omega_{\Psi(y)} v = \omega_{\Psi(y)} \cdot d\Psi_y \cdot dY_{\Psi(y)} v = \omega_{\Psi(y)} \cdot d\Psi w$$

quindi alla n-pla $(\omega_1(x), \dots \omega_n(x))$ corrisponde la n-pla $\nabla \Psi_y \omega(\Psi(y)) = {}^t dY^{-1} \omega$

- Nel caso in cui la forma è il differenziale di una funzione φ da A in $\mathbf{R}$ si ha in effetti per l a regola della catena $d\varphi \circ \Psi_y = d\varphi_{\Psi(y)} d\Psi_y$. Quindi il differenziale rispetto alle nuove variabili è proprio l'esperssione della forma nelle nuove variabili.

- Se si considera invece una n-pla come campo di vettori e si vogliono le sue coordinate rispetto alla base indicata si ottengo le n-funzioni $(d\Psi_y)^{-1} f = (d(\Psi)_x^{-1}) f = dY f$: ovvero le coordinate di $dY f_x$ rispetto al riferimento cartesiano $\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_n$ di B: se $\sum f_i \mathbf{e}_i = \sum g_i d\Psi \mathbf{f}_i$ applicando dY si ottiene $dY f = \sum g_i \mathbf{f}_i$.

- La nozione di campo come derivazione giustifica la richiesta di questa trasformazione: se si considera la derivazone definita da f rispetto alle variabili x essa espressa come derivazione rispetto alle variabili y, avendo per la *regola della catena* $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial Y_1}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots \frac{\partial Y_n}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_n}$

da luogo ad una diversa n-pla di funzioni: $f_{\Psi(y)} \sim_x \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \left(\sum_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} f_i\right) \frac{\partial}{\partial y_j} \sim_y dY f_{\Psi(y)}$

- Ancor di più si apprezza questa differenza considerando il caso in cui C è una k-superficie regolare parametrizzata da qualche $\Phi : A \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ e la funzione f dia un vettore tangente nel punto in cui la si calcola. In questo caso la base dello spazio tangente in $z = \Phi(x)$ disponibile è $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_1}(Y(x)), \dots \frac{\partial \Psi}{\partial y_k}(Y(x))\right)$.

Un cambiamento di coordinate su A: $Y : A \to B$ da una riparametrizzazione di C, $\Phi \circ Y^{-1}$, e quindi una nuova base del tangente in ogni punto.

- Nel caso in cui il campo sia una gradiente $f = \nabla_x \varphi$ con $\varphi : x \in A \mapsto \mathbf{R}$ la sua espressione nelle nuove coordinate $dY \nabla_x \varphi$ *non* è il gradiente rispetto ad esse della $\varphi \circ \Psi : y \in B \mapsto \mathbf{R}$.

In effetti quest'ultima n-pla rappresenta il differenziale di $\varphi \circ \Psi$ rispetto al prodotto scalare canonico delle coordinate cartesiane in B, relative agli usuali vettori del riferimento cartesiani $\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_n$: se $k = \sum_i k_i \mathbf{f}_i$ allora $d\varphi \circ \Psi(h) = \sum_i \frac{\partial \varphi \circ \Psi}{\partial y_i} k_i = \langle \nabla_y \varphi \circ \Psi, k \rangle_y$. Invece la prima rappresenta tale differenziale rispetto ad un altro prodotto (forma bilineare) tra una coppia di n-ple coordinate in B relative a $\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_n$ che sia uguale al prodotto scalare ordinario delle coordinate relative a $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$: se $a = dYu$, $b = dYv$ sono n-ple coordinate rispetto $\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_n$ si ha $\sum_i u_i v_i = \langle u, v \rangle_x = \langle d\Psi a, d\Psi b \rangle_x = \sum_{i,j,m} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_m} a_m b_j$. Quindi se $k = \sum_i k_i \mathbf{f}_i$ la n-pla $w = dY \nabla_x \varphi$ è tale che $d\varphi \circ \Psi(k) = \sum_{i,j,m} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_j} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y_m} w_m k_j = \langle d\Psi w, d\Psi k \rangle_x$.

Rimontato (pull-back)**di una forma** Più in generale se $\Psi : B \subseteq \mathbf{R}^m \to A \subseteq \mathbf{R}^n$ è una mappa C^1 ed ω una forma differenziale su A si definisce la forma differenziale *rimontata* (pull-back) di ω mediante Ψ su B come $\omega \circ \Psi \cdot d\Psi$. Essa viene denotata con $\Psi^\sharp \omega$.

- Se φ è una funzione definita su A si indicherà ancora con $\Psi^\sharp \varphi$ la funzione composta $\varphi \circ \Psi$. Chiaramente per la regola della catena:

$$d\Psi^\sharp \varphi = \Psi^\sharp(d\varphi)$$

- Se γ è una funzione a valori in B si indicherà con $\Psi_\sharp \gamma$ la sua immagine $\Psi \circ \gamma$.

- Infine tale trasformazione è esattamente quello che ci aspetta dall' "azione" delle funzioni vettoriali sui cammini: il lavoro non deve cambiare cambiando sistema di coordinate

$$\int_\gamma \Psi^\sharp \omega \; = \; \int_{\Psi_\sharp \gamma} \omega$$

I principali teoremi: caratterizzazione forme esatte e campi conservativi, forme chiuse e forme localmente esatte, Teorema di Poincarè , invarianza per omotopia regolare dell'integrale di una forma chiusa o localmente esatta, esattezza delle forme e integrabilità di campi chiusi su domini semplicemente connessi. Cfr. C.J e F.M.S.

Formula di Gauss-Green mediante integrazione orientata

1-forma dell'area