Complementi di Analisi Matematica
V.M. Tortorelli
C.L.S. Informatica, A.A. 2003/04
Note per la lezione tredicesima: 5 maggio 2004

Principio di Duhamel Una "giustificazione" del metodo della variazione delle costanti per una soluzione di $W'(t) = A(t)W(t) + F(t)$ è dato dal seguente principio dovuto alla linearità:

una soluzione del problema non omogeneo si ottiene per "sovrapposizione di infiniti impulsi istantanei", eguali al termine forzante F, all' "evoluzione omogenea"

- Formulato nel presente contesto il principio diventa:

$$\boxed{\begin{cases} Y_s'(t) = A(t)Y_s(t), \quad t \in A \\ Y_s(s) = F(s) \end{cases}, \quad W(t) = \int^t Y_s(t)ds}$$

Derivando formalmente sotto il segno di integrale si ha che W è in effetti soluzione.

- Nel caso delle equazioni del primo ordine $w' = aw + f$, tale formula da esattamente il secondo addendo della soluzione generale: $\int^t e^{-\int_s^t a(x)dx} f(s)ds$.

Se $M(t)$ è la matrice data da una base dello spazio delle soluzioni dell'omeogenea sarà $Y_s(t) = M(t)c(s)$, con $c(s) = M^{-1}(s)F(s)$, e si ottiene

$$W(t) = M(t)\int^t M^{-1}(s)F(s)ds$$

che giustifica completamente i passaggi fatti e mostra come tale soluzione sia quella ottenuta dal metodo della variazione delle costanti.

NOTA: nel caso di <u>coefficienti costanti</u> $W(t)$ viene espressa come $\int_0^t Z_s(t-s)ds$ e $Z_s(0)=F(s)$.

Risolvente di un sistema Se si considera una base di soluzioni del sistema omogeneo $Y'(t) = A(t)Y(t)$ che all'istante s dia la base cartesiana di $\mathbf{R}^n$ indicando con $S_s(t)$ la matrice con colonne tali vettori si ha direttamente dalla definizione e dall'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy:

$$\boxed{\begin{cases} S_s'(t) = A(t)S_s(t), \\ S_s(s) = Id \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{matrix} S_\sigma(t)S_s(\sigma) = S_s(t) \\ S_s(t)S_t(s) = Id \end{matrix}}$$

tale matrice di funzioni si chiama *risolvente* del sistema.

- È interessante esprimere le soluzioni generali del sistema non omogeneo $U'(t) = A(t)U(t)+F(t)$ considerando la soluzione particolare data dalla variazione delle costanti arbitrarie $W(t) = S_{t_0}(t)\int S_{t_0}^{-1}(s)F(s)ds$ e le relazioni di invertibilità del risolvente:

$$\boxed{U(t) = S_{t_0}(t)U_0 + \int_{t_0}^t S_s(t)F(s)ds}$$

ottenedo l'analogo della formula per le equazioni del primo ordine.

NOTA: per un'equazione di ordine n con termine noto $f(t)$, se $u_1, \dots u_n$ è una base dello spazio delle soluzioni e si cerca una soluzione particolare del tipo $c_1(t)u_1(t) + \dots c_n(t)u_n(t)$, essendo una base del sistema del primo ordine associato data dai vettori delle prime $n-1$ derivate di tali funzioni, ci si riduce a risolvere il sistema lineare numerico:

$$\begin{pmatrix} u_1(t) & \dots & \dots & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & \dots & \dots & \dots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & \dots & \dots & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Per equazioni del secondo ordine $n = 2$, si ha: $\begin{cases} u_1c_1' + u_2c_2' &= 0 \\ u_1'c_1' + u_2'c_2' &= \frac{f}{a} \end{cases}$