Complementi di Analisi Matematica
V.M. Tortorelli
C.L.S. Informatica, A.A. 2003/04
Schema della seconda e terza lezione: 3-5 marzo 2004

Convergenza di successioni. Si dice che una successione $\mathbf{x} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^N$ converge a $x \in \mathbf{R}^N$, e scriveremo $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^n = x$ o $\mathbf{x}^n \to x$, $n \to \infty$, se: $\boxed{\forall\varepsilon\exists n_\varepsilon\forall n \geq n_\varepsilon\ d(\mathbf{x}^n, x) \leq \varepsilon}$, cioè se $\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{x}^n, x) = 0$.

- Se $y \in \mathbf{R}^N$ si ha $|y_i|_1 \leq |y|_N \leq |y_1| + \ldots |y_N|$. Quindi una successione converge se e solo se le N successioni di numeri reali date dalle sue coordinate cartesiane convergono rispettivamente alle componenti omologhe del suo limite. Questo permette di estendere le proprietà dei limiti in $\mathbf{R}^N$.
- La propietà di *completezza* di $\mathbf{R}$ viene estesa ad $\mathbf{R}^N$ grazie alla nozione di successione $\mathbf{x} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^N$ di Cauchy: $\boxed{\forall\varepsilon\exists n'_\varepsilon\forall m, n \geq n'_\varepsilon\ d(\mathbf{x}^n, \mathbf{x}^m) \leq \varepsilon}$.

TEOREMA $\boxed{\text{Cauchy in } \mathbf{R}^N \iff \text{convergente in } \mathbf{R}^N}$.

Aperti, chiusi, bordo, punti di accumulazione: cfr. Courant-John Vol.2 Cap. 1.1.
- Se $C \subseteq D \subseteq \mathbf{R}^N$ allora C si dice *aperto (chiuso) relativamente a* D se vi è A aperto (risp. chiuso) per cui $C = D \cap A$.

Limiti di funzioni. Se $C \subseteq D \subseteq \mathbf{R}^N$, $P \in \mathbf{R}^N$ di accumulazione per C, $f : D \to \mathbf{R}^M$ e $L \in \mathbf{R}^M$, si dice che f converge a L per x che tende a P su C se: $\boxed{\forall\varepsilon\exists\delta_\varepsilon > 0\forall x\ x \in C,\ x \neq P,\ 0 < d(x, P) \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow d(f(x), L) \leq \varepsilon}$, cioè $\lim_{x\in C,\ d(x,P)\to 0} d(f(x), L) = 0$. Si scriverà $\lim_{x\in C,\ x\to P} f(x) = L$, o $f \to L$ se $x \to P,\ x \in C$.
- $f \to L$, $x \to P$, $x \in C$ se e solo se per ogni $\mathbf{x}^n \to P$, $\mathbf{x}^n \in C$, $\mathbf{x}^n \neq P$ si ha $f(\mathbf{x}^n) \to L$;
- se e solo se per ogni divisione di C in un numero finito di parti che abbiano P come punto di accumulazione f ha limite in ognuna di queste parti e tali limiti sono tutti eguali ad L.
e.g. $f(x, y) = \frac{y}{x}$, $D = \{(x, y) :\ x \neq 0\}$, $C = \{(x, x) :\ x \neq 0\}$, $P = (0, 0)$: f ha limite 1 in P su C, ma non ha limite in P su D.

Limitati: $C \subseteq \mathbf{R}^N$ si dice (metricamente) *limitato* se è contenuto in una palla: $\exists M \geq 0\forall x \in C|x| \leq M$.
- Una funzione si dice *limitata* su $A \subseteq \mathbf{R}^N$ se i valori di f su A formano un insieme limitato.
- Se C è un insieme non limitato ed f è definita su C si dice che f tende ad L *all'infinito* su C se $\boxed{\forall\varepsilon > 0\exists r\forall x \in C,\ |x| \geq r \Rightarrow d(f(x), L) \leq \varepsilon}$, cioè $\lim_{|x|\to\infty,\ x\in C} d(f(x), L) = 0$.
- Se una funzione ha limite per $x \to P$ (o all'infinito), $x \in C$ allora è *limitata* su C intersecato una palla di centro P (il complementare di una palla). In particolare se una successione ha limite allora è limitata.

Funzioni continue $C \subseteq D \subseteq \mathbf{R}^N$, $P \in C$ $f : D \to \mathbf{R}^M$: si dice che f è continua in P su C, o che P è un punto di continuità di f su C se $\boxed{\begin{array}{l}P \text{ è di accumulazione per } C \text{ e } \lim_{x\in C,\ x\to P} f(x) = f(P),\\ \text{oppure } P \text{ è un punto isolato per } C\end{array}}$

-f è continua in P su C se e solo se per ogni $\mathbf{x}^n \to P$, $\mathbf{x}^n \in C$ si ha $f(\mathbf{x}_n) \to f(P)$.
- **Definizione.** f è continua su C se è continua in ogni punto su C.
- **Definizione.** f è *uniformemente continua* su C se $\boxed{\forall\varepsilon\exists\delta_\varepsilon > 0\forall x, y \in C, d(x, y) \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon}$ ovvero $\lim_{\delta\to 0} \sup_{x,\ y\in C,\ d(x,y)\leq\delta} d(f(x), f(y)) = 0$.

ESERCIZIO: f è uniformemente continua su C se e solo se date due successioni $\mathbf{x}^n \in C$, $\mathbf{y}^n \in C$ per cui $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \to 0$ si ha anche $d(f(\mathbf{x}_n), f(\mathbf{y}_n)) \to 0$.

- le funzioni $(x, y) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \mapsto x + y \in \mathbf{R}^N$ $\left(|(x+y)-(u+v)| \leq |x-u|+|y-v|\right)$, $(\lambda, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \mapsto \lambda x \in \mathbf{R}^N$ $\left(|\lambda x-\gamma y| \leq |\lambda||x-y|+|\lambda-\gamma||y|\right)$ sono continue.
- composizione di funzioni continue è continua.

Se ne deduce che le funzioni continue su un insieme a valori in $\mathbf{R}^M$ "ereditano" la struttura lineare di $\mathbf{R}^M$. Essendo la dimensione di $\mathbf{R}^N$ finita se ne deduce che le funzioni lineari sono continue.

Un'altra dimostrazione è la seguente: $x \in \mathbf{R}^n \mapsto Ax \in \mathbf{R}^M$ è lineare con A matrice di componenti A_{ij}, $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$. Basta provare la continuità in $O \in \mathbf{R}^N$ poichè $Ax - Ay = A(x-y)$. Quindi $|Ax|_M^2 = \sum_i (\sum_j A_{ij} x_j)^2 \leq (Schwartz) \sum_i \sum_j A_{ij}^2 \sum_j x_j^2 = |x|_N^2 \sum_{ij} A_{ij}^2$

E.g. per composizione con la somma e il prodotto si ha che le funzioni le cui componenti sono funzioni razionali a denominatore non nullo sono continue.

- f è continua su C se e solo se

le preimmagini di aperti sono aperte *relativamente* a C
le preimmagini di chiusi sono chiuse *relativamente* a C

Nota: In particolare *i luoghi di zeri* di funzioni continue di $\mathbf{R}^N$ sono chiusi.

Compatti per successioni Un sottoinsieme C di $\mathbf{R}^N$ si dice *comaptto* (per successioni) se da ogni successione a valori in C si può estrarre una sottosuccessione che converge e il cui limite è un elemento di C.
- I sottoinsiemi compatti sono chiusi. I sottoinsiemi finiti sono compatti

TEOREMA $\boxed{C \subseteq \mathbf{R}^N \text{ è compatto se e solo se è limitato e chiuso.}}$

ESERCIZIO un sottoinsieme compatto o ha un punto di accumulazione o è fatto da un insieme finito di punti.

TEOREMA $\boxed{\text{L'immagine di un compatto mediante una funzione continua è un compatto.}}$

NOTA: non è vero in generale che l'immagine di aperti (chiusi) mediante funzioni continue sia aperta (chiusa).

TEOREMA $\boxed{\text{Se } C \text{ è compatto } f : C \to \mathbf{R} \text{ allora } f \text{ ha un punto di massimo e un punto di minimo su } C}$,

cioè $\exists a \in C$ $b \in C$ $\forall x \in C$ $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

TEOREMA $\boxed{\text{Se } f \text{ è continua su } C \text{ compatto allora è uniformemente continua su } C.}$

Connessi. Un sottoinsieme C di $\mathbf{R}^N$ si dice *connesso* se solo se *non* è unione di due aperti (chiusi) relativamente a C, non vuoti e disgiunti.

Cioè se A, B sono entrambi aperti o chiusi di $\mathbf{R}^N$ per cui $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, $C \subseteq A \cup B$ allora $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

In altri termini *non* vi è una $f : C \to \{0, 1\}$ surgettiva e continua su C.

ESERCIZIO: i connessi di $\mathbf{R}$ sono $\emptyset$, $\mathbf{R}$, intervalli e semirette.

- **Definizione:** Un insieme C si dice *connesso per archi* se ogni coppia di punti può essere congiunta da un cammino continuo interamente contenuto in C.

Cioè per $x, y \in C$ vi è $\gamma_{xy} : t \in [0; 1] \mapsto \gamma(t) \in C$ *continuo* per cui $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.
- Ogni connesso per archi è anche connesso in quanto gli intervalli in $\mathbf{R}$ sono connessi.

Il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ dato dall'unione di $\{0\} \times [-1; 1]$ con grafico della funzione $\sin \frac{1}{x}$ è connesso ma non connesso per archi.

PROPOSIZIONE Un sottoinsieme aperto e connesso è anche connesso per archi.

TEOREMA

L'immagine di un connesso (connesso per archi) mediante una funzione continua è ancora connessa (connessa per archi).

.

In particolare una funzione continua su un connesso a valori reali assume tutti i valoi compresi tra il suo estremo superiore ed il suo estremo inferiore.