Complementi di Analisi Matematica
V.M. Tortorelli
C.L.S. Informatica, A.A. 2003/04
Note alle elzioni sesta, settima ed ottava: 17-24 marzo 2004

Cammini. - Si dirà *cammino* una funzione continua $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$, ove $I \subseteq \mathbf{R}$ è un intervallo.
- Un cammino si dirà *semplice* se γ è iniettiva.
- Un cammino si dirà *chiuso* se I è un intervallo chiuso $[a;b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$ (in altri termini corrisponde ad una funzione continua dalla circonferenza unitaria in R^n, ovvero una funzione continua su $\mathbf{R}$ che sia $b-a$ periodica).
- Un cammino si dirà *semplice chiuso* se è chiuso ed è iniettivo tranne che negli estermi (la funzione che induce sulla circonferenza è iniettiva) .
- Un cammino si dirà C^k se è differenziabile con continuità k volte.
- Un cammino si dirà C^k*-chiuso* se è C^k e le sue prime k derivate sono cammini chiusi (ovvero induce una funzione su $\mathbf{R}$ che sia periodica e C^k).
- Un cammino si dirà *regolare* se è differenziabile e $\frac{d\gamma}{dt} \neq 0$
- Un cammino si dirà C^k, ovvero regolare, *a tratti*, se I è unione di un numero finito di intervalli su ognuno dei quali γ è C^k, rispettivamente regolare.
Parametrizzazioni. I cammini possono avere la stessa immagine ma rappresentare modi diversi di "percorrerla": e.g. $t \in [0;2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in [0;\pi] \mapsto (\cos 2t, \sin 2t)$, $t \in [0;2\pi] \mapsto (\cos 2t, \sin 2t)$,
$t \in [-\sqrt{2\pi}; \sqrt{2\pi}] \mapsto (\cos t^2, \sin t^2)$
tutti hanno come immagine la circonferenza unitaria, il primo la percorre una volta con "velocità " in modulo costante eguale ad 1, il secondo eguale a 2, il terzo la percorre due volte nello stesso senso, il quarto due volte in senso differente.
- Volendo mettere in evidenza quante volte e in che verso viene percorsa l'immagine di un cammino piuttosto che "quanto velocemente" diremo che due cammini $\gamma : I \to \mathbf{R}^n$ e $\varphi : J \to \mathbf{R}^n$ sono *equivalenti con la stessa orientazione* se

$\gamma(t) = \varphi(h(t))$, $h : I \to J$ continua, invertibile crescente e quindi con inversa continua
- Se non si 'einteressati ai versi di percorrenza si può introdurre una nozione di equivalenza meno stringente ammettendo riparametrizzazioni h continue e strettamente monotone.

NOTA: se un cammino C^1 a tratti è regolare sulle *parti interne* di un numero finito di intervalli che ricoprono I allora è equivalente a un cammino C^1-regolare a tratti
Curve I cammini solo continui possono avere immagini non aderenti all'idea intuitiva di curva: si possono trovare cammini che ricoprono l'intero quadrato $[0;1] \times [0;1]$ nel piano! D'altronde un concetto geometrico che riguardi l'immagine di un cammino se formalizzato in termini di cammini non deve dipendere da parametrizzazioni equivalenti.
- Quindi in termini di cammini una *curva orientata* è la classe di equivalenza di cammini con un rappresentante regolare a tratti che tranne per un numero finito di parametri risulti iniettivo (che corrispondono ad un numero finito di "autointersezioni" dell'immagine).
Tangente Tranne un numero finito di punti un insieme che può essere visto come immagine di una parametrizzazione regolare a tratti del tipo precedente ha una *direzione tangente* data dal versore tangente $\frac{\gamma'}{|\gamma'|}$.
In particolare poichè $\gamma'(t_0) \neq 0$ dalla definizione di differenziabilità e per la diseguaglianza triangolare si ha:

$$\frac{dist(\gamma(t), \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0))}{dist(\gamma(t_0), \gamma(t))} \to 0, \ t \to t_0$$

ovvero l'errore dato dall'approssimazione lineare è infinitesimo relativamente a ciò che si desidera misurare.
k-superficie parametrica regolare - Si dice *k-superficie (parametrica) regolare* una funzione
$\psi : A \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ ove $A = \overset{\circ}{\overline{A}}$ è connesso, e $k \leq n$, per cui:

i- la ψ è restrizione di una funzione C^1 su una perto contenente $\overline{A}$

ii- i vettori $\frac{\partial \psi}{\partial t_1}, \ldots \frac{\partial \psi}{\partial t_1}$ generano un sottospazio di dimenzione k in $\mathbf{R}^n$: ovvero vi siano k indici $m_1, \ldots m_k$ per cui $det(\frac{\partial \psi_{m_i}}{\partial t_j})_{1 \leq i, \ j \leq k} \neq 0$
- Una superficie parametrica si dirà *semplice* se è iniettiva.
NOTA: una $fA \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{n-k}$ che sia C^1 intorno alla chiusura di A da naturalmente una k-superficie che parametrizza il suo grafico $x \mapsto \psi(x) = (x, f(x))$
NOTA: il teorema del rango assicura che l'immagine di una superficie *semplice* è almeno localmente nel codominio un grafico.
- Come per le curve si ha che l'immagine di una k-superficie ha in ogni suo punto $\psi(\bar{t})$ un piano tangente dato da $\psi(\bar{t}) + s_1 \frac{\partial \psi}{\partial t_1}(\bar{t}) + \ldots s_k \frac{\partial \psi}{\partial t_k}(\bar{t})$ al variare di $s \in \mathbf{R}^k$.

k-varietà I teoremi del Dini e del rango rendono la seguente definizione naturale, in quanto non tutti i luoghi di zeri possono essere visti come immagine di una superficie regolare semplice:
- Un *sottoinsieme* V di $\mathbf{R}^n$ si dice k-varietà se:
per ogni $P \in V$ vi è un intorno U_P di P e una $X_P : V \cap U \to \mathbf{R}^k$
  i- $X(P) = 0$ e: o $X(U \cap V) = B(0)$
  ii- X è C^1 ed iniettiva
  iii- X^{-1} è C^1
- La famiglia $(V \cap U_P, X_P)$, $P \in V$ si dice sistema di *coordinate locali* per V, mentre le X_P^{-1} parametrizzazioni locali.
NOTA: ogni X^{-1} risulta una k-superficie parametrica semplice: il suo differenziale ha rango massimo poichè composto con quello di X deve dare l'applicazione identica di $\mathbf{R}^k$.
Lunghezza - Si dice *lunghezza di un cammino*

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup\{\sum_{i=0}^{N-1} dist(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) : \ a = t_0 < t_1 < \dots t_N = b\}$$

- La lunghezza di un cammino è eguale per cammini equivalenti.
- Un cammino si dice *rettificabile* se ha lunghezza finita.
NOTA: intuitivamente la lunghezza defita non corrisponde alla misura dell'immagine ma alla misura del percorso fatto: ciò accade per cammini semplici.

Teorema Se $\gamma : [a;b] \to \mathbf{R}^n$ è C^1 a tratti $\boxed{\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt}$

Integrazione non orientata di funzioni su superficie parametrica Sulla falsariga del teorema di cambiamento di variabile negli integrali multipli, considerando la corrispondenza tra somma dei determinanti minori $k \times k$ di k vettori in $\mathbf{R}^n$ e k-volume del k-parellepipedo da essi generato sembra naturale definire per una k-superficie ψ il suo k volume come "somma infinita" dei k-volumi dei parellelpipedi "infinitesimi" dati dall'approssimazione lineare

$$Vol_k(\psi) = \int_A \sqrt{\sum_{1 \le m_1 < \dots m_k \le n} det\left(\frac{\partial \psi_{m_i}}{\partial t_j}\right)^2} dt_1 \dots dt_k, \quad dVol_k = \sqrt{\sum_{1 \le m_1 < \dots m_k \le n} det\left(\frac{\partial \psi_{m_i}}{\partial t_j}\right)^2} dt_1 \dots dt_k$$

NOTA: per una superficie semplice in effetti ciò corrisponde all'dea intuitiva di misura della sua immagine. Altrimenti tale nozione tiene conto delle diverse "sovrapposizioni" (su sottoinsiemi di misura non nulla del dominio) date dalla parametrizzazione.
- Data una funzione continua g sull'immagine di una k-superficie ψ condominio misurabile si definisce

$$\int_\psi g dVol_k = \int_A g(\psi(t_1, \dots t_k)) \sqrt{\sum_{1 \le m_1 < \dots m_k \le n} det\left(\frac{\partial \psi_{m_i}}{\partial t_j}\right)^2} dt_1 \dots dt_k$$

- Nel caso di ipersuperficie che sia un grafico $\psi(t) = (t, f(t))$ ovvero $k = n-1$ e $f : A \subseteq \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$, si ottiene: $\int_\psi g dVol_k = \int_A g(t_1, \dots t_k, f(t_1 \dots t_k)) \sqrt{1 + |\nabla f(t_1, \dots t_k)|^2} dt_1 \dots dt_k$
- Nel caso di cammini, per i quali la definizione si estende direttamente nel caso C^1 a tratti, si ottiene: $\int_\gamma g d\mathcal{L} = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$
Propopsizione $|\int_\psi g| \le \sup_{p \in \psi(A)} |g(p)| Vol(\psi)$.
- Se $h : D \subseteq \mathbf{R}^k \to A \subset \mathbf{R}^k$ è un cambiamento di variabile regolare (con A e D misurabili e h iniettiva con differenziale invertibile) dal teorema di cambiamento di variabile per gli integrali multipli segue che gli integrali rispetto a una superficie $t \mapsto \psi(t)$ su A sono eguali a quelli rispetto alla superficie $s \mapsto \psi(h(s))$
NOTA: in particolare l'integrazioni di funzioni su un cammino non dipendono dall'orientazione relativa di riparametrizzazioni.
- Nel caso di un insieme C parametttrizzato da (che è immagine di) una k-superficie semplice ha senso scrivere $\int_C g(P) dVol_k$

Integrazione su varietà Per integrare una funzione su una varietà si espime questa come unione di immagini di parametrizzazioni locali, ovvero si scrive la funzione come somma di funzioni nulle fuori dagli intorni in cui la varietà è immagine di una parametrizzazione locale, si integra su queste e si somma.

Volumi e aree di figure di rotazione: formule di Guldino

Domini semplicemente connessi cfr. app. seconda parte lez. X.