Complementi di Analisi Matematica
V.M. Tortorelli
C.L.S. Informatica, A.A. 2003/04
Appunti dell' ottava lezione: 24 marzo 2004

Moltiplicatori di Lagrange e gradiente tangenziale

Misurabilità alla Peano-Jordan

- Un n-rettangolo (cartesiano) in $\mathbf{R}^n$ è il prodotto cartesiano di n intervalli: $R = I_1 \times \ldots I_n$, I_i, $1 \leq i \leq n$ intervalli limitati con o senza estremi inclusi in $\mathbf{R}$.
- La misura elementare di un n rettangolo e il prodotto delle differnze degli estremi dei suoi lati.

Definizione se $A \subset \mathbf{R}^n$ non vuoto e *limitato* si dice *misurabile secondo Peano-Jordan* se i seguenti numeri coincidono:

$\sup \sum_{R \in \mathcal{F}} me(R)$: al variare di $\mathcal{F}$ famiglia *finita* di rettangoli disgiunti contenuti in A (approssimazione interna)

$\inf \sum_{R \in \mathcal{G}} me(R)$: al variare di $\mathcal{G}$ famiglia *finita* di rettangoli disgiunti con unione contenente A (approssimazione esterna)

Nel caso il comune valore se dice misura (n-dimensionale) di Peano-Jordan e si denota con $m(A)$. $m_n(A)$. Si pone inoltre $m(\emptyset) = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c} m(R) = me(R) \text{ se } R \text{ è rettangolo cartesiano} \\[1em] m(A \cup B) = m(A) + m(B) \text{ se } A \cap B = \emptyset \end{array}}$$

Integrabilità alla Riemann Una funzione *limitata* f a valori in $\mathbf{R}$ si dice Riemann integrabile su un n-rettangolo Q (nulla fuori da Q) se i seguenti numeri coincidono:

$\sup \sum_{R \in \mathcal{F}} \inf_R f me(R)$: al variare di $\mathcal{F}$ famiglia *finita* di rettangoli con parti interne disgiunte con unione Q (approssimazione inferiore)

$\inf \sum_{R \in \mathcal{G}} \sup_R f me(R)$: al variare di $\mathcal{G}$ famiglia *finita* di rettangoli con parti interne disgiunte con unione Q (approssimazione superiore)

In tal caso il comune valore si dice integrale di Riemann di f su Q e si indica con $\int_Q f(x)dx$.

i- A è P.-J. misurabile se e solo se δA lo è e $m(\delta A) = 0$ se e solo se χ_A è R.-integrabile.
ii- se $f \geq 0$ allora f è R.-integrabile su Q se e solo se il suo sottografico su Q 'eP.J.-misurabile in $\mathbf{R}^{n+1}$. Nel caso $m_{n+1}(\{(x, y) : \; x \in Q, \; 0 \leq y \leq f(x)\}) = \int_Q f(x)dx$. (DOMINI NORMALI).
iii- una funzione continua f su un rettangolo R è R.-integrabile.
Grazie al teorema degli zeri e al teorema di Weiestrass si ha che vi è $\xi \in R$ per cui $\frac{1}{m(R)} \int_R f dx = f(\xi)$.
iv- se f e g sono R.-integrabili tale è fg. Se $g = \chi_A$ l'integrale di questo prodotto si indica con $\int_A f(x)dx$.

Sommabilità.

- Sia f una funzione a valori reali *non negativa*. Essa si dice *sommabile* in senso generalizzato se:
  - $\forall m \in \mathbf{N}$ $f \wedge m$ è R.-integrabile su $[-m; m]^n$,
  - $\lim_{m \to \infty} \int_{[-m;m]^n} f(x) \wedge m dx \in \mathbf{R}$.

Tale limite si dirà integrale in senso generalizzato e si indicherà con $\int f dx$.
Una funzione a valori reali si dice sommabile se lo sono la sua parte positiva e la sua parte negativa. Il suo integrale in senso genaralizzato sarà la differenza tra quelli delle sue parti.

Proprietà principali

1- le funzioni sommabili formano uno spazio vettoriale e l'integrale è un funzionale lineare;
2- il minimo e il massimo tra due funzioni sommabili sono anch'essi sommabili (reticolo),
- se $f \geq g$ allora $\int f \geq \int g$ (monotonia dell'integrale),
3- $\left| \int f \right| \leq \int |f|$ (diseguaglianza triangolare),
4 - se A e B sono misurabili in senso generalizzato tali sono $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ (proprietà di semialgebra),
- se f è sommabile sull'unione allora $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f$ (additività).

NOTA: se f e g sono sommabili non è detto che il loro prodotto lo sia: e.g. $f{=}g{=}\frac{1}{\sqrt{x}}$. Se una delle due è limitata si.

5- $\int f(x + v)dx = \int f(x)dx$ (invarianza per traslazioni).
6- TEOREMA DI FUBINI-TONELLI Posto $x = (x', x'') \in \mathbf{R}^n$, con $x' \in \mathbf{R}^k$, $x'' \in \mathbf{R}^{n-k}$ se:
- $x \mapsto f(x)$ è sommabile in $\mathbf{R}^n$
- e per ogni $x'' \in \mathbf{R}^{n-k}$ la $x' \mapsto f(x', x'')$ è sommabile in $\mathbf{R}^k$

allora
- $x'' \mapsto \int f(x', x'')dx'$ è sommabile in $\mathbf{R}^{n-k}$ e $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^{n-k}} \left(\int_{\mathbf{R}^k} f(x', x'')dx' \right) dx''$.

NOTA: per avere un teorema più soddisfaciente è necessario estendere la nozione di sommabilità ad una classe più ampia di funzioni. In particolare con le nozioni qui date è *falso* che se

- per ogni $x'' \in \mathbf{R}^{n-k}$ la $x' \mapsto f(x', x'')$ è sommabile in $\mathbf{R}^k$
- $x'' \mapsto \int f(x', x'')dx'$ è sommabile in $\mathbf{R}^{n-k}$

ne segua che $x \mapsto f(x)$ sia sommabile in $\mathbf{R}^n$:
si consideri una funzione *non Riemann integrabile* di una variabile $x'' \mapsto \varphi(x'')$ per esempio la funzione che vale 1 sui razionali in $[0;1]$ e 0 altrove, e la funzione $x'\chi_{[-2;2]}(x')$. Si consideri $f(x', x'') = \chi_{[-2;2]}(x' - \varphi(x''))$: la funzione non è R.-integrabile poichè in ogni rettangolo contenuto in $[-2;3] \times [0;1]$ ha estermo superiore 1 ed estremo inferiore 0. Ma la funzione $x' \mapsto \chi_{[-2;2]}(x' - \varphi(x''))$ è R.-integrabile per ogni x'' e il suo integrale non dipende da $x'' \in [0;1]$ essendo sempre la lunghezza dell'intervallo $[-2;2]$ o del suo traslato $[-1;3]$, cioè 4. In particolare è una funzione costante di x'' in $[0;1]$ e quindi R.-integrabile.

7- TEOREMA DI CAMBIAMENTO DI VARIABILE: Sia $\Phi : y \in A \mapsto x = \Phi(y) \in \Phi(A)$ *iniettiva*, differenziabile con continuità, A e $\Phi(A)$ siano aperti misurabili di $\mathbf{R}^n$ e $d\Phi_y$ sia sempre invertibile. Allora se $x \mapsto f(x)$ è sommabile su $\Phi(A)$:

- $y \mapsto f(\Phi(y))|det\nabla\Phi(y)|$ è sommabile su A
- $\int_{\Phi(A)} f(x)dx = \int_A f(\Phi(y))|det\nabla\Phi(y)|dy$.

Si noti che per il teorema di invertibilità locale l'inversa di Φ è anch'essa differenziabile con continuità. Invadendo A con compatti misurabili ci si riduce al caso in cui $\infty > C \geq |det\nabla\Phi(y)| \geq c > 0$, e Φ è interscambiabile con Φ^{-1}.

Lunghezza di un cammino Definizione ed enunciato della dimostrazione del teorema di rettificabilità. Elemento di lunghezza ed integrali di funzioni su cammini.
k-Volume di k-superficie parametrica regolare semplice Integrazione di funzioni su superficie parametrica. Indipendenza dalla parametrizzazione (esercizio). Formule di Guldino.