Complementi di Analisi Matematica,
Anno Accademico 2005-2006,
Laurea Specialistica in Informatica
V.M. Tortorelli

I foglio di esercizi
dal 14 febbraio al 23 febbraio 2006

Registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso possono essere reperiti in rete all'indirizzo http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html ivi selezionando il nome del corso.

ESERCIZIO n. 1 - Si scriva in forma parametrica il segmento parallelo al vettore dall'origine a $(1, 2, 3)$, passante per $(4, 5, 6)$ e lungo 14.
- Si scriva in forma parametrica il triangolo di vertici $(1, 2, 3)$, $(4, 6, 8)$, $(5, 7, 9)$.
- Si trovino due numeri reali a, b per cui $(1, 2) = a(1, 1) + b(2, 1)$. Si mostri che sono unici.

ESERCIZIO n. 2 - In uno spazio vettoriale si suddivida il segmento di estremi A e B in quattro parti di egual lunghezza mediante i tre punti P, Q, R espressi in funzione di A e B.
- Dati A e B, trovare le coordinate di un punto R sul segmento AB tale che la distanza di questo da A sia il doppi di quella da B.
- Se R è punto medio del segmento AB, determinare B in funzione di R e A.

DEFINIZIONE: un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale si dice *convesso* se per ogni coppia di suoi punti contiene tutto il segmento tra essi compreso ($t \in [0; 1]$, P, $Q \in C \;\; \Rightarrow (1 - t)P + tQ \in C$).
Si osserva che l'intersezione di una famiglia di convessi è un convesso.
$K \subseteq C$ si dice *faccia estremale* se contiene i segmenti di C che al loro interno contegnono qualche suo punto.
PROPOSIZIONE In uno spazio vettoriale di dimensione finita ogni convesso senza facce estremali proprie è intersezione di semispazi privi dell' iperpiano estremale.

ESERCIZIO n. 3 - Si provi che un $[0; 1]$, $\{(x, y) : x = 3y + 1\}$, $\{(x, y) : y \leq \sqrt{2}x - 6\}$, $\{(x, y, z) : z = 3\}$, $\{(x, y, z) : x - y \leq z\}$ sono convessi.
- Si provi che $\{(x, y) : y \geq |x|\}$, $\{(x, y) : y \geq x^2\}$, $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ sono convessi.

DEFINIZONE: dati n punti P_1, ..., P_n si *dice combinazione baricentrica* o *media pesata* di essi un qualsiasi punto del tipo $m_1P_1 + \ldots m_nP_n$, ove $m_1 + \ldots m_n = 1$, $0 \leq m_1, \;\ldots m_n \leq 1$.
I numeri $m_1, \;\ldots m_n$ si diranno anche pesi della combinazione.
DEFINIZIONE: dato un insieme A si dice *inviluppo convesso di* A l'insieme dei punti che si ottengo con combinazioni baricentriche di elementi di A.
PROPOSIZIONE: Per un sottoinsieme A del piano l'inviluppo convesso si ottiene con medie pesate di terne di punti di A. Nello spazio di quaterne. In uno spazio vettoriale di dimensione d l'inviluppo convesso si ottiene con combinazioni baricentriche di $d-$ple di punti dell'insieme.

ESERCIZIO n. 4 Trovare le coordinate del baricentro (definito come punto di incontro delle mediane) di un triangolo conoscendo le coordinate dei suoi tre vertici.

ESERCIZIO n. 5 - Si esprima il triangolo ottenuto dall' intersezione dei semipiani $x \geq 1$, $y \geq 1$, $y \leq -2x + 3$ come inviluppo convesso di tre punti.

- Mostrare che in generale l'inviluppo convesso di un insieme A non è eguale all'intersezione dei semipiani, che contengono ognuno la retta che lo individua, e che contengono A.

ESERCIZIO n. 6 Dato un punto P di uno spazio vettoriale si scriva la simmetria rispetto a tale punto.

ESERCIZIO n. 7 Scrivere in fissate coordinate cartesiane (e come funzione delle coordinate (x, y, z) del punto da trasformare) le seguenti trasformazioni affini del piano o dello spazio:
- simmetria rispetto alla generica retta passante per l'origine
- simmetria rispetto alla retta passante per $(2, 3)$ e parallela a $(3, 4)$
- rotazione antioraria di un sesto di 'angolo giro' attorno all'origine
- rotazione antioraria di un ottavo di 'angolo giro' attorno al punto $(4, 5)$
- simmetria rispetto al punto $(1, 2, 3)$
- simmetria rispetto al piano $x - y + z = 0$
- simmetria rispetto al piano $x - y + z = 3$
- rotazione antioraria di un angolo retto attorno all'asse verticale $(0, 0, 1)$
- rotazione di un angolo retto attorno all'asse orientato positivamente dall'origine a $(1, 1, 1)$ in senso antiorario.

ESERCIZIO n. 8 Scrivere in fissate coordinate cartesiane (e come funzione delle coordinate (x, y) del punto da trasformare) le seguenti trasformazioni affini dal piano o dello spazio:
- la dilatazione di centro $(1, 1)$ e fattore di scala $\frac{1}{2}$;
- la dilatazione anisotropa di centro $(1, 1)$ e fattore di scala $\frac{1}{2}$ nella direzione $(1, 2)$ e fattore 2 nella direzione $(2, 1)$.
- dilatazione anisotropa di centro l'origine e fattori di scala $2,\ 4,\ -1$ rispettivamente nelle direzioni $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 2, 3)$

ESERCIZIO n. 9 A che trasformazioni del piano o dello spazio corrsipondono le seguenti funzioni: $(x, y) \mapsto (-y, x)$,$(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 1)$, $(x - y, x + y)$; $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$, $(x, y, 0)$, $(\frac{1}{2}x, 2y, 0)$

ESERCIZIO n. 10 - Date due rette per l'origine nel piano che trasformazione si ottiene facendo prima la simmetria rispetto ad una di esse e quindi la simmetria rispetto la seconda?
- Scambiando l'ordine di queste simmetrie quando si ottiene lo stesso risultato?

ESERCIZIO n. 11 Una trasformazione che manda ogni retta in un'altra retta parallela alla prima e non lascia nessun punto fisso è una traslazione.
- Una trasformazione che manda ogni retta in un'altra retta parallela alla prima e lascia un punto fisso è una dilatazione rispetto ad un punto.
-Dati due segmenti paralleli quante sono le traslazioni e le dilatazioni che trasformano uno nell'altro?
-Dati quattro punti $A \neq B$, $C \neq D$ vi è un'unica traslazione o dilatazione che trasforma A in C e B in D.

ESERCIZIO n. 12 Quali sono tutte e sole le trasformazioni lineari bigettive che trasformano $x^2 + y^2 = 1$ in se?
-Quali sono tutte e sole le trasformazioni lineari bigettive che trasformano $|x| + |y| = 1$ in se?

ESERCIZIO n. 13 Siano $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $a^2 + b^2 = 1$. La funzione $R : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da

$$R(x, y) = (\xi, \eta), \qquad \xi = ax + by, \quad \eta = -bx + ay,$$

definisce una *rotazione* del piano (attorno all'origine). Si provi che:

(i) si ha $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

(ii) posto $U = R(1, 0)$, $V = R(0, 1)$, le rette per O, U e per O, V formano un sistema di coordinate ortogonali monometriche orientato positivamente;

(iii) posto $(\xi', \eta') = R(x', y')$, si ha $(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$.

ESERCIZIO n. 14 Siano $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $a^2 + b^2 = 1$. La funzione $S : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, definita da

$$S(x, y) = (\xi, \eta), \qquad \xi = ax + by, \quad \eta = bx - ay,$$

definisce una *simmetria* del piano (rispetto all'origine). Si provi che:

(i) si ha $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$ per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$;

(ii) posto $U = S(1, 0)$, $V = S(0, 1)$, le rette per O, U e per O, V formano un sistema di coordinate ortogonali monometriche orientato negativamente;

(iii) posto $(\xi', \eta') = S(x', y')$, si ha $(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$.

ESERCIZIO n.15 Si provi che tutte e sole le trasformazioni lineari del piano che conservano il prodotto scalare sono le isometrie lineari (rotazioni e riflessioni).

ESERCIZIO n. 16** Le trasformazioni T bigettive del piano che mandano rette in rette sono tutte e sole le trasformazioni affini ($T(x, y) - T(0, 0)$ è lineare) e bigettive.

ESERCIZIO n. 17** Le trasformazioni del piano che conservano le distanze sono affini e la loro parte lineare è data da matrici ortogonali (con colonne ortogonali di norma 1, che rappresentano rotazioni e riflessioni).

ESERCIZIO n.18 Le trasformazioni lineari del piano che conservano gli angoli tra due semirette sono tutte e sole quelle del tipo $(x, y) \mapsto (ax + by, -bx + ay)$, $(ax + by, bx - ay)$.

L'equazione come luogo di zeri che individua una retta nel piano ovvero un piano nello spazio non dice altro che si considerano i punti (x, y, z) che hanno un prodotto scalare di valore costante d con un vettore prefissato (a, b, c): $ax + by + cz = d$. Semipiani e semispazi vengo invece individuati dalle relative diseguaglianze.

ESERCIZIO n. 19 - Determinare l'equazione della retta passante per $(2, -1)$ e perpendicolare alla retta di equazione $4x - 3y + 12 = 0$.

-Determinare la retta passante per $(0, 0)$ e per il centro di $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$.

- Si calcoli la distanza del punto $(-3, 2)$ dalla retta di equazione $4x - 3y + 12 = 0$.

- Si calcoli la distanza del punto $(-3, 2, -1)$ dal piano di equazione $4x - 3y + 2z - 12 = 0$.
- Si determini come luogo di zeri il piano parallelo ai vettori dall'origine a $(1, 2, 3)$ e $(4, 5, 6)$ e passante per $(7, 8, 9)$.
- Si determini come luogo di zeri il piano passante per $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ e $(7, 8, 9)$.

ESERCIZIO n. 20 Che poliedri individuano gli insiemi $\{(x, y, z) : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1, \ |z| \leq 1\}$, $\{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| \leq 1\}$. Qual'è la distanza dall'origine delle facce del secondo?

ESERCIZIO n. 21 Dimostrare che per ogni $P, \ Q$ si ha $|P - Q|^2 = |P|^2 + |Q|^2 - 2\ P \bullet Q$.

ESERCIZIO n. 22 - Provare che il triangolo di vertici $(2, -1)$, $(4, 2)$ e $(5, 1)$ è isoscele.
- Provare che il triangolo di vertici $(-3, 3)$, $(-1, 3)$ e $(11, -1)$ è rettangolo.
- Calcolare la lunghezza della mediana uscente dal punto A relativa al triangolo ABC, ove $A = (-1, 1)$, $B = (0, -6)$, $C = (-10, -2)$.
- Scrivere l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti da $(0, 2)$ e $(2, 1)$.
- Scrivere l'equazione del luogo dei punti che sono equidistanti dai punti $(0, 2, 1)$ e $(2, 1, 3)$.

ESERCIZIO n.23 - Si provi che le rette $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ sono parallele se e solo se esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$.
- Si provi che le rette $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ sono perpendicolari se e solo se esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $\lambda a = -b'$, $\lambda b = a'$.
- Si provi che: le rette $X = P + tQ$, $t \in \mathbf{R}$, e $ax + by + c = 0$ sono perpendicolari se e solo se i vettori Q e (a, b) sono proporzionali; parallele se e solo se Q e $(b, -a)$ sono proporzionali.

ESERCIZIO n. 24 - Si provi che due vettori, (a, b) e (α, β), sono uno multiplo dell'altro se e solo se $a\beta - b\alpha = 0$.
- Dimostrare che il sistema $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases}$ per ogni dato (c, γ) è risolubile univocamente se e solo se risulta $a\beta - b\alpha \neq 0$; in tal caso se ne scriva la soluzione (x, y).

ESERCIZIO n. 25 - Si trovino le soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$
- Si trovino le soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases}$
- Si trovino le soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$

ESERCIZIO n. 26 - Due vettori nello spazio sono uno multiplo dell'altro se e solo se il loro prodotto vettore è nullo.
- Si verifichi che dati due vettori nello spazio (α, β, γ) e (A, B, C) il vettore individuato dalla terna $(det((\beta, \gamma), (B, C)), -det((\alpha, \gamma), (A, C)), det((\alpha, \beta), (A, B)))$ è ortogonale ai due vettori.
- Si deduca dal precedente punto che tre vettori nello spazio stanno sullo stesso piano passante per l'origine se e solo se il determinante delle loro coordinate è nullo.
- Si provi che il sistema $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ Ax + By + Cz = D \end{cases}$ ha un'unica soluzione per ogni dato (d, δ, D)

se e solo se $det((a,b,c),(\alpha,\beta,\gamma),(A,B,C)) \neq 0$.
- Per quali dati(d,δ,D) è risolubile se invece il determinante è nullo?

ESERCIZIO n.27 - Si consideri lo spazio vettoriale delle funzioni continue reali definite su un intervallo. Si mostri che $f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ è una norma su tale spazio.
- Si mostri che il rapporto tra la norma $f \mapsto \max|f|$ e $f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ non può essere limitato al variare di f.
- Si consideri l'insieme delle successioni $n \mapsto a_n$ con serie dei moduli convergente $\sum_n |a_n| < +\infty$. Si provi che è uno spazio vettoriale. Si mostri che $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto \sum_n |a_n|$ è una norma su tale spazio.
- Si consideri l'insieme delle successioni $n \mapsto a_n$ con serie dei quadrati convergente $\sum_n |a_n|^2 < +\infty$. Si provi che è uno spazio vettoriale. Si mostri che $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto \sqrt{\sum_n |a_n|^2}$ è una norma su tale spazio.

ESERCIZIO n. 28 Siano $d : X \times X \to \mathbf{R}^+$, $\rho : X \times X \to R^+$, $\delta : Y \times Y \to \mathbf{R}^+$, distanze sull'insieme X e sull'insieme Y. Si discuta quale delle seguenti funzioni è ancora una distanza.

$$d_1(a,b) = \frac{d(a,b)}{1+d(a,b)} \ ; \quad d_2(a,b) = \operatorname{artan}(d(a,b)) \ ; \quad d_3(a,b) = \min\{d(a,b),1\} \ ;$$

$$d_4((a,\alpha),(b,\beta)) = \max\{d(a,b);\delta(\alpha,\beta)\} \ ; \quad d_5((a,\alpha),(b,\beta)) = (d(a,b)^p + \delta(\alpha,\beta)^p)^{\frac{1}{p}} \ , \ p \geq 1 \ ;$$

$$d_6(a,b) = \Psi(d(a,b)),\ \Psi \text{ concava, non negativa, nulla in } 0 \ ; \quad d_7(a,b) = \chi_{]0;+\infty[}(d(a,b)).$$

ESERCIZIO n. 29 Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita con norme $|\cdot|_V$ e $|\cdot|_W$. Si provino le seguenti eguaglianze e quindi che la funzione definita è una norma sullo spazio vettoriale delle funzioni lineari da V in W.

$$L \mapsto \|L\| =_{def} \sup_{v\in V\setminus(0)} \frac{|Lv|_W}{|v|_V} = \sup_{|v|_V=1} |Lv|_W = \sup_{0<|v|_V\leq 1} \frac{|Lv|_W}{|v|_V} = \sup_{0<|v|_V\leq 1} |Lv|_W.$$

ESERCIZIO n.30 Si calcolino le norme delle seguenti funzioni lineari, estendendo la definizione negli ultimi due casi:

$$L(x,y) = ax+by \ ; \quad L(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ ; \quad x \in \mathbf{R}^n \mapsto Ax \in \mathbf{R}^n,\ {}^tAA = I \ ;$$

$$f \in C([0;1]) \mapsto L(f) = \int_0^1 f(y)dy \in \mathbf{R},\ |g|_C = \max_{0\leq x\leq 1} |g(x)| \ ;$$

$$f \in C([0;1]) \mapsto L(f) = \int_0^x f(y)dy \in C([0;1]),\ |g|_C = \max_{0\leq x\leq 1} |g(x)|.$$

ESERCIZIO n.31 Se A è una matrice $n \times n$ si provi che $\|A\|^2 = \|{}^tAA\|$. Si mostri che non sempre $\|A\|^2 = \|A^2\|$.
