Complementi di Analisi Matematica,
Anno Accademico 2005-2006,
Laurea Specialistica in Informatica

V.M. Tortorelli

V foglio di esercizi

9 maggio 2006

Registro degli argomenti svolti e materiale relativo al corso possono essere reperiti in rete all'indirizzo http://www.dm.unipi.it/didactics/home.html ivi selezionando il nome del corso.

ESERCIZIO n. 1 Determinare i punti critici delle seguenti funzioni: $x^3+(x-y)^2$, $x^4+(x-y)^2$, $xy+y^2-3x$, $\sin(x+y)$, $x^2-\sin y$, $x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$.

ESERCIZIO n. 2 Si dica se $(0,0)$ è di massimo, di minimo, o di sella per ciascuna delle seguenti funzioni: x^4+y^4, x^4-y^4, $1-x^4-x^2y^2-y^4$.

ESERCIZIO n. 3 Determinare minimo e massimo delle seguenti funzioni nei rispettivi insiemi:

xy su $\{x^2+y^2\le 1\}$

$x^2+y^2-(x+y)$ su $\{|x|\le 1, |y|\le 1\}$

$\frac{x^2y}{x^2+4y^2}+x$ per $xy>0$ $xy+x$ per $xy\le 0$ su $\{0\le y\le 1, y^2-1\le x\le 1\}$

ESERCIZIO n. 4 Sia $f(x,y)=2x^4-x^2e^y+e^{4y}$. Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di tale funzione e se ne calcoli il limite per $x^2+y^2\to+\infty$. Si osservi che vi sono solo due punti di minimo assoluto e nessun altro punto critico. Si traccino approssimativamente le linee di livello $f=c$, al variare di c in $\mathbf{R}$, mettendo in risalto quali sono connesse, quali sono limitate.

ESERCIZIO n. 5 Sia data un insieme di coppie $(x_i,y_i)_{1\le i\le N}$. Determinare a e b in modo tale che la funzione:

$\chi^2(a,b)=\sum_{i=1}^N(y_i-ax_i-b)^2$ sia minima. Il minimo è assoluto o relativo?

ESERCIZIO n. 6 Si ricorda che $C\subseteq\mathbf{R}^n$ è detto convesso se contine interamente i segmenti delimitati dai suoi punti: se $x\in C$, $y\in C$ e $\lambda\in[0;1]$ allora $\lambda x+(1-\lambda)y\in C$. Una funzione $f:C\to\mathbf{R}$ si dice convessa se C è convesso e se $\lambda\in[0;1]$ allora $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

a) Sia Ω un aperto convesso di $\mathbf{R}^n$, e sia $f:\Omega\mapsto\mathbf{R}$ differenziabile. Dimostrare che f è convessa se e solo se, per ogni $x,y\in\Omega$: $\langle\nabla f(x)-\nabla f(y),x-y\rangle\ge 0$ dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ rappresenta il prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$.

b) Nelle stesse ipotesi si deduca che f è convessa se e solo se il suo grafico sta sopra ogni piano tangente ad esso.

c) Se poi f è C^2 si provi che f è convessa se e solo se $Hf(x)$ è definita non negativa in ogni punto.

ESERCIZIO n. 7

a) Sia $f:\Omega\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ una funzione strettamente convessa, ove Ω è un aperto convesso. Si dimostri che f ha al più un estremale interno a Ω?

b) Utilizzando che una funzione convessa a valori reali, definita su un chiuso C limitato convesso è continua si provi che se $C=\bar\Omega$, con Ω aperto convesso, allora il massimo di f è assunto su $\partial\Omega$.

ESERCIZIO n. 8 Trovare i punti di massimo o di minimo relativo e calcolare i valori di massimo relativo e minimo relativo, delle seguenti funzioni sui domini rispettivi:

$$f(x,y) = \frac{x^4+2x^3y}{x^4+y^4}\ , \quad y - x^2 = 0\ ; \quad f(x,y) = \sin((x-2)^2+y^2)\ , \quad (1-x)^3+y^2 = 0\ ;$$

$$f(x,y) = x^2+6xy+3y^2\ , \quad x^2+y^2-2xy = \frac{1}{(x+y-2)^2}\ ;$$

$$f(x,y,z) = e^{-(x^2-y+z^2)}\ , \quad \frac{x^2}{4}+y^2+3z^2 \le 1\ , \ (Ex.C.P.S.29.14,\ 278)\ ;$$

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2\ , \quad \begin{cases} (z+1)^2-y^2-(x+3)^2 = 0 \\ z^2+y^2-(x+1)^2 = 0 \\ z > -3 \end{cases} \quad ;$$

$$f(x,y,z) = (x+1)^2+(y-\varepsilon)^2+z\ , \quad \begin{cases} (1-x)z = (1+x)y \\ z^2+y^2-(x+1)^2 = 0 \\ z > -3 \end{cases} \quad ;$$

$f(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2$, tetraedro di vertici $(-1,-1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(0,1,-1)$, $(0,0,1)$;

$$f(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2\ , \quad \max\{|x+2|,|y+3|,|z+4|\} = 1\ ;$$

$$f(x,y,z,w) = x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}+\frac{w^2}{4}, \quad \begin{cases} (x+y+z+w)^2+(x-y+z-w)^2 = 1 \\ (x-y-z+w)^2+(x-y-z-w)^2 = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO n. 9 Provare che l'insieme $D = \left\{(x,y,z)\ :\ \frac{\sqrt{x^2+\frac{y}{2}^2}-3}{4}+z^2 = 1\right\}$ è chiuso e limitato. Determinare poi la massima e la minima distanza dei punti di D dall'origine.

---

* ESERCIZIO n. 10 È vero che il minimo valore di $f(x,y) = (x^2+y^2)^2-x^2+y^2$ su $(x-R)^2+(y-R)^2 = 2R^2$ è sempre 0? Giustificare la risposta.

ESERCIZIO n. 11
a) Trovare il massimo volume di un parallelepipedo rettangolo inscritto nell'ellissoide $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 = 1$.
b) Trovare l'ellissoide $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 = 1$ di volume massimo per cui $a+b+c = M$, $a,\ b,\ c > 0$.
c) Trovare la minima distanza tra gli insiemi $\{x^2+y^2 = 1\} \cap \{yz = xz\}$ e $\{z-y = 0\} \cap \{x+y+z = 1\}$.

ESERCIZIO n.12 Sia $\mathbf{O}$ l'insieme delle matrici ortogonali $n \times n$, e sia $f : \mathbf{O} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \mathrm{tr}\ A$. Si dimostri che esistono unici e si calcolino i punti di massimo e minimo di f.

ESERCIZIO n.13 Dato un vettore $x = (x_1, \ldots x_n)$, tale che $x_i > 0$ per ogni i e $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, si definisce $H(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \log x_i$. Determinare il vettore che massimizza H.

ESERCIZIO n.14 In un mercato duopolistico ci sono n aziende che producono lo stesso bene, ognuna in quantità y_i. Il prezzo p del bene dipende dalla quantità totale prodotta $\sum_{i=1}^n y_i$. Ogni azienda decide di produrre la quantità y_i che massimizza il proprio profitto:

$$f_i(y_i) = p\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) y_i - cy$$

dove c è il costo unitario di produzione del bene.
Determinare in quali condizioni il mercato è in equilibrio (ogni azienda, cioè, non intende modificare la propria produzione y_i).
Dimostrare che per $n \to \infty$ il prezzo di equilibrio p converge a c.

ESERCIZIO n. 15
a) - Se $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$ e $\triangle u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} > 0$ allora u non ha punti di massimo locale.

- Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Ω aperto limitato, se $\triangle u \geq 0$ allora $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.
(Si consideri x_0 di massimo su $\bar{\Omega}$ di u e $v(x) = u(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$. Si applichi il precedente punto a v.)

- Si deduca che se $\triangle u \geq 0$ allora u non ha punti di massimo locale stretto.

b) - Si provi che se Ω é un aperto limitato, $f \in C(\mathbf{R}^n)$, $g \in C(\mathbf{R}^n)$ allora vi é *al piú una* funzione u definita su $\overline{\Omega}$ che risolve:

$$\begin{cases} \triangle u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \end{cases}$$

- Si provi che per questa eventuale soluzione si ha:

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + \frac{(\mathrm{diam}\Omega)^2}{2n} \max_{\overline{\Omega}} |f|.$$

NOTA: Si puó provare:
- se Ω é un connesso aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\triangle u \geq 0$, allora se u assume massimo in $\overline{\Omega}$ allora lo assume **solo** sul bordo $\partial\Omega$ oppure u é costante.
- se Ω é un connesso aperto, $u \in C^2(\Omega)$, $\triangle u = 0$, allora u non assume ne massimi ne minimi locali interni in Ω a meno che non sia costante.

ESERCIZIO n. 16 Utilizzando quanto dimostrato nel precedente esercizio si trovino tutte le soluzioni delle equazioni:

$$\begin{cases} \triangle u(x,y) = 0 & x^2+y^2<1 \\ u(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2 & x^2+y^2=1 \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \Omega = \{x^2+y^2<1\} \end{cases} \qquad \begin{cases} \triangle u(x,y) = 0 & \max\{|x|,|y|\} < \pi \\ u(x,y) = \sin x \cos y & \max\{|x|,|y|\} = \pi \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \Omega = \{\max\{|x|,|y|\} < \pi\} \end{cases}$$

ESERCIZIO n.17 Siano $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo, limitato o meno, $f : (x, y) \in I \times \mathbf{R} \mapsto f(x, y)$ una funzione per cui dato $y \in \mathbf{R}$ $\exists \min_{x \in I} f(x, y) := g(y)$ e si ponga $C(y) =: \{x \in I : f(x, y) = g(y)\}$.

a: Per $I = [0; 1]$ si mostri un esempio in cui g non risulta derivabile in qualche punto, pur essendo f differenziabile infinite volte.

[Si consideri il sopragrafico di g in termini di quello di f]

b: - Se $y \mapsto f(x, y)$ è continua si provi che: $\mathrm{o}(1) \geq g(y + h) - g(y)$, per $h \to 0$

- se poi esiste $\frac{\partial f}{\partial y}$ si provi: $h \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \mathrm{o}(h) \geq g(y + h) - g(y)$, per $h \to 0$ e $x \in C(y)$

c: Se f è continua su $I \times \mathbf{R}$, $(x_n, y_n) \to (x, y) \in I \times \mathbf{R}$ e $x_n \in C(y_n)$ si provi che $x \in C(y)$.

d: Si assuma che $I = [a; b]$ sia limitato e chiuso.

- Si provi che se f è continua su $I \times \mathbf{R}$ anche g lo è su $\mathbf{R}$;

[Si usi giustificatamente l'uniforme comtinuità di f sui sottoinsiemi limitati di $I \times \mathbf{R}$]

- **(*)** se poi vi è $\frac{\partial f}{\partial y}$ *continua* allora g ha derivata "in avanti" eguale al minimo di $\frac{\partial f}{\partial y}$ su $C(y)$:

$$\exists \left(\lim_{h \to 0^+} \tfrac{g(y+h) - g(y)}{h} :=\right) \frac{d^+}{dy} \min_x f(x, y) = \min_{x \in C(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

[Ci si riduca ad usare il teorema del valor medio, uniforme continuità, sottosuccessioni e il risultato del terzo punto]

e: Si mostri, anche con una semplice esemplificazione grafica, che vi sono f differenziabili infinite volte su $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ per cui g non è continua né a destra né a sinistra.