Complementi di Analisi Matematica

Laurea Specialistica in Informatica, A.A. 2005-2006

V.M Tortorelli

V=PIANO REALE $\mathbb{R}^2$	V = PIANO COMPLESSO $\mathbb{C}^2$	$V^2/\!\sim$= CLASSI DI EQUIVALENZA DI FUNZIONI RIEMANN INTEGRABILI IN SENSO GENERALIZZATO E QUADRATO SOMMABILE
$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2$	$\omega\cdot\eta=\omega_1\overline{\eta_1}+\omega_2\overline{\eta_2}$	$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\min\{\|f(s)\|^2,n\}ds<\infty$ $f\sim g\Leftrightarrow\int_0^{2\pi}\|f(s)-g(s)\|^2ds=0$ $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})_{L^2}:=\int_0^{2\pi}f(s)\overline{g(s)}ds$
$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$	$\|\omega\|=\sqrt{\omega\cdot\omega}$	$\|\mathbf{f}\|_{L^2}=\sqrt{(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})_{L^2}}$
$\mathbf{e}^1$=(1,0) , $\mathbf{e}^2$=(1,0) $\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}^i=\delta_{ij}$	idem idem	$\mathbf{e}^n(t):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$, $n\in\mathbb{Z}$ $(\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}^i)=\delta_{ij}$
PITAGORA-DESCARTES: un punto si ricostruisce dalle sue componenti $\mathbf{x}=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}^1)\mathbf{e}^1+(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}^2)\mathbf{e}^2$	idem	PRIMO PROBLEMA: in che senso $\sum_n(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}^n)\mathbf{e}^n$ ricostruisce $\mathbf{f}$? PRIMO FATTO: $(\mathbf{e}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ non puó essere una base algebrica di V^2 SECONDO FATTO: non é vero che dato t $\sum_n(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}^n)\mathbf{e}^n(t)$ converga come serie di numeri ad $f(t)$, anche se $\mathbf{f}$ é continua, e anche se convergesse potrebbe non convergere ad $f(t)$

PRIMO TEOREMA: Se $\mathbf{f}$ é integrabile in senso generalizzato alla Riemann e con quadrato sommabile, allora la successione di numeri complessi coniugati $\{c_n(\mathbf{f})\}_{n\in\mathbb{Z}}=\{(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é in l^2. Vale infatti la **diseguaglianza dell'energia**:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}^n)|^2\leq\int_0^{2\pi}|f(s)|^2ds.$$

SECONDO TEOREMA: Data $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in l^2$, risulta di Cauchy per la norma $|\cdot|_{L^2}$ la serie di funzioni: $\sum_{n=-N}^{N}c_n\mathbf{e}^n$.

COROLLARIO: Sia $\mathbf{f}$ integrabile in senso generalizzato alla Riemann e con quadrato sommabile. Allora risulta di Cauchy per la norma $|\cdot|_{L^2}$ la serie di funzioni: $S_N(\mathbf{f})=\sum_{n=-N}^{N}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{e}^n)\mathbf{e}^n$.

Per completare il quadro si enuncia anche il seguente asserto di validitá assai piú generale:

TERZO TEOREMA: Se $\mathbf{f}$ é integrabile in senso generalizzato alla Riemann e con quadrato sommabile su $[0;2\pi]$, allora la serie di funzioni $S_N(\mathbf{f})$ converge proprio ad $\mathbf{f}$ in norma $|\cdot|_{L^2}$, e vale **l'eguaglianza dell'energia** (densità dello spazio generato dagli $\mathbf{e}^n$, $n\in\mathbf{Z}$) .

SECONDO PROBLEMA: viceversa, data una successione in l^2, si puó ricostruire dalla serie $\sum_{n=-N}^{N}c_n\mathbf{e}^n$ (che é di Cauchy in norma $|\cdot|_{L^2}$) una funzione integrabile in senso generalizzato alla Riemann e con quadrato sommabile?
TERZO FATTO: in generale no: poiché lo spazio di tali classi di funzioni **non é completo rispetto alla data norma**, mentre l^2 é completo, e la trasformazione $\mathbf{f}\to\{c_n(\mathbf{f})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é un'immersione isometrica.
TERZO PROBLEMA: come **rappresentare** il completamento astratto, rispetto alla data norma, dello spazio $V^2/\!\sim$ con un altro **spazio di funzioni**(a meno di relazioni di equivalenza)?
Si puó far questo in modo che vi sia una nozione di integrale su queste nuove funzioni che **estenda** quella generalizzata alla Riemann?

OSSERVAZIONI: - L'integrazione alla Borel-Lebesgue permette di rispondere a questa come ad altre questioni.
- Il completamento astratto $(\overline{M},\overline{d})$ di uno spazio metrico (M,d):

$$\overline{M}=\{\mathbf{x}:\mathbb{N}\to M \text{ di Cauchy}\}\big/\sim,\ \ \mathbf{x}\sim\mathbf{y}\Leftrightarrow d(x_n,y_n)\to 0,\ \ \overline{d}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})=\lim d(x_n,y_n)$$

é molto poco maneggevole. Non sempre si visualizza $\mathbb{R}$ come completamento astratto di $\mathbb{Q}$ in questi termini.

Dimostrazione del primo teorema: Si ha: $(S_N \cdot \mathbf{f})_{L^2} = (\sum_{n=-N}^{N} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}^n)\mathbf{e}^n \cdot \mathbf{f})_{L^2} = \sum_{n=-N}^{N} ((\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}^n)\mathbf{e}^n \cdot \mathbf{f})_{L^2} = \sum_{n=-N}^{N} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}^n)(\mathbf{e}^n \cdot \mathbf{f})_{L^2} = \sum_{n=-N}^{N} |(\mathbf{e}^n \cdot \mathbf{f})_{L^2}|^2 \in \mathbb{R}^+$.
D'altronde si ha anche, per le condizioni di ortonormalitá degli $\mathbf{e}^n$:
$\sum_{n=-N}^{N} |(\mathbf{e}^n \cdot \mathbf{f})_{L^2}|^2 = |S_N|^2_{L^2}$.
Quindi: $0 \ \leq \ |S_N - \mathbf{f}|^2_{L^2} = |S_N|^2_{L^2} + |\mathbf{f}|^2_{L^2} - 2\mathcal{R}(S_N \cdot \mathbf{f})_{L^2} = |\mathbf{f}|^2_{L^2} - |S_N|^2_{L^2}$. •

Dimostrazione del secondo teorema: Se $N \geq M \geq 0$ si ha:
$(S_N \cdot S_M)_{L^2} = (\sum_{n=-N}^{N} c_n \mathbf{e}^n \cdot \sum_{n=-M}^{M} c_n \mathbf{e}^n) = \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} (c_n \mathbf{e}^n \cdot c_m \mathbf{e}^m) = \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} c_n \overline{c_m} (\mathbf{e}^n \cdot \mathbf{e}^m) = \sum_{n=-M}^{M} |c_n|^2 = |S_M|^2_{L^2}$.
Quindi, per $N \geq M \geq 0$:
$|S_N - S_M|^2_{L^2} = |S_N|^2_{L^2} + |S_M|^2_{L^2} - 2\mathcal{R}(S_N \cdot S_M)_{L^2} =$
$= |S_N|^2_{L^2} - |S_M|^2_{L^2} = \sum_{M=|n|}^{N} |c_n|^2$
Basta infine osservare che una serie convergente é di Cauchy.•