PRIMO APPELLO, 13 GENNAIO 2003 – TESTI

I PARTE, GRUPPO A.

1. Determinare il campo di esistenza di $f(x) := \sqrt{1 - 2\sin x}$.
2. Tracciare il grafico di $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. Determinare una primitiva di $9x^2 \log x$.
4. Mettere in ordine crescente i seguenti numeri: $100!$, 1000^{10}, 10^{300}.
5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin(ax) - e^{3x}}{x^2}$ è finito, e calcolarlo.
6. Risolvere $y' - y\sin x = \sin x$ con dato iniziale $y(0) = 0$.
7. Trovare la soluzione generale di $y'' + 3y' + 2y = 6e^x$.
8. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x^7+1)^{1/5} - (x^7+1)^{1/5}}{(2x^{35}+1)^{1/25} - (x^{21}+1)^{1/15}}$.

I PARTE, GRUPPO B.

1. Determinare il campo di esistenza di $f(x) := \log(1 - 2\sin x)$.
2. Tracciare il grafico di $f(x) = -e^{1-x}$.
3. Determinare una primitiva di $16\,x^3 \log x$.
4. Mettere in ordine crescente i seguenti numeri: $100!$, 1000^{20}, 10^{1000}.
5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin(ax) - e^{3x}}{x^2}$ è finito, e calcolarlo.
6. Risolvere $y' - y\,\sin x = \sin x$ con dato iniziale $y(0) = 0$.
7. Trovare la soluzione generale di $y'' + 2y' + y = 4e^x$.
8. Calcolare $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x^7+1)^{1/5} - (x^7+1)^{1/5}}{(2x^{35}+1)^{1/25} - (x^{21}+1)^{1/15}}$.

II PARTE, GRUPPO A.

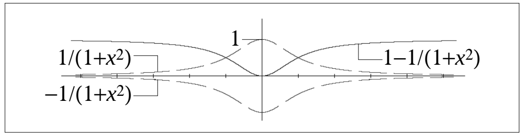
1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} = a$.
2. Si consideri l'equazione differenziale
$$y'' - 2y' - 3y = f(x) \ . \qquad (*)$$
Determinare la parte principale della soluzione con ordine di infinitesimo più alto in 0 nei seguenti casi: a) $f(x) := 2x + 5$; b) $f(x) := x^n$ con n intero postivo assegnato; c) $f(x)$ una generica funzione infintamente derivabile di $\mathbb{R}$.
3. Siano C e C' gli insiemi di punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che, rispettivamente, $x^2 + y^2 \le 1$ e $x^2 + z^2 \le 1$.
a) Disegnare sommariamente C, C', e, se possibile, $C'' := C \cap C'$.
b) Descrivere le intersezioni di C'' con il piano di equazione $x = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
c) Calcolare il volume di C''.
4. a) Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $\tan x = ax$ contenute nell'intervallo $(0, \pi/2)$.
b) Studiare il comportamento di queste soluzioni per $a \to +\infty$.

II PARTE, GRUPPO B.

1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}} = a$.
2. Si consideri l'equazione $y'' + 2y' + 3y = f(x)$. Determinare la parte principale della soluzione con ordine di infinitesimo più alto in 0 nei seguenti casi: a) $f(x) := 2x + 1$; b) $f(x) := x^n$ con n intero postivo assegnato; c) $f(x)$ una generica funzione infintamente derivabile di $\mathbb{R}$.
3. Siano C e C' gli insiemi di punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che, rispettivamente, $x^2 + y^2 \le 1$ e $x^2 + z^2 \le 1$.
a) Disegnare sommariamente C, C', e, se possibile, $C'' := C \cap C'$.
b) Descrivere le intersezioni di C'' con il piano di equazione $x = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
c) Calcolare il volume di C''.
4. a) Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $\tan x = ax$ contenute nell'intervallo $(0, \pi/2)$.
b) Studiare il comportamento di queste soluzioni per $a \to +\infty$.

I PARTE, GRUPPO A.

1. $\sin x \leq 1/2$, ovvero $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Big[\Big(\frac{5}{6}+2n\Big)\pi, \Big(\frac{13}{6}+2n\Big)\pi\Big]$.
2. Si tratta del (ben noto!) grafico di $1/(1+x^2)$ riflesso rispetto all'asse delle x e poi traslato in basso di 1.



3. $\displaystyle\int 9x^2 \log x\, dx = 3x^2 \log x - \int 3x^3 \frac{1}{x}\, dx = 3x^3 \log x - x^3 = x^3(3\log x - 1)$.
4. $1000^{10} = 10^{30} < 100! < 100^{150} = 10^{300}$.
5. $1 + \sin(ax) - e^{3x} = (a-3)x - \dfrac{9}{2}x^2 + o(x^2)$. Il limite è finito per $a = 3$, e vale $-\frac{9}{2}$.
6. $\dfrac{y'}{1+y} = \sin x$, $\log|1+y| = c - \cos x$ e deve essere $c = 1$. Quindi $e^{1-\cos x} - 1$.
7. $y = \alpha^{-2x} + \beta e^{-x} + e^x$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
8. $\frac{(2x^7+1)^{1/5}-(x^7+1)^{1/5}}{(2x^{35}+1)^{1/25}-(x^{21}+1)^{1/15}} = \frac{\big(1+\frac{2}{5}x^7+o(x^7)\big)-\big(1+\frac{1}{5}x^7+o(x^7)\big)}{\big(1+\frac{2}{25}x^{35}+o(x^{35})\big)-\big(1+\frac{1}{15}x^{21}+o(x^{21})\big)} = \frac{\frac{1}{5}x^7+o(x^7)}{-\frac{1}{15}x^{21}+o(x^{21})} \sim -\frac{3}{x^{14}}$.
   Quest'ultima funzione tende a $-\infty$ in per $x \to 0$ (la potenza è pari!).

I PARTE, GRUPPO B.

1. $\sin x < 1/2$, ovvero $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Big]\Big(\frac{5}{6}+2n\Big)\pi, \Big(\frac{13}{6}+2n\Big)\pi\Big[$.
2. Si tratta del grafico di e^x riflesso rispetto all'origine (oppure del grafico di e^{-x} riflesso rispetto all'asse delle y) e traslatoa destra di 1.
3. $x^4(4\log x - 1)$.
4. $1000^{20} = 10^{60} < 100! < 100^{500} = 10^{1000}$.
5. Come il gruppo A.
6. Come il gruppo A.
7. $y = (\alpha + \beta x)e^{-x} + e^x$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
8. Come il gruppo A.

II PARTE, GRUPPO A.

1. Ponendo $f(x) := x^3/(x-1)$, l'equazione può essere riscritta come $f(x) = a^2$. Siccome $f'(x) = x^2(2x-3)/(x-1)^2$, possiamo studiare gli intervalli di monotonia della funzione: f è (strettamente) decrescente in $(-\infty, 1)$, con limiti $\pm\infty$ agli estremi (e quindi l'equazione $f(x) = a^2$ ha una ed una sola soluzione per ogni a), f è decrescente in $(1, 3/2]$ con limite $+\infty$ in 1, e valore $27/4$ in $3/2$ (quindi l'equazione ha una ed una sola soluzione per $a^2 \geq 27/4$), infine f è crescente in $(3/2, +\infty)$ (quindi l'equazione ha una ed una sola soluzione per $a^2 > 27/4$). Concludendo, l'equazione ha una soluzione per $a^2 < 27/4$, due per $a = 27/4$ e tre per $a > 27/4$.
2. a) La soluzione generale dell'equazione omogenea é $y = ae^{-x} + be^{3x}$ con $a, b \in \mathbb{R}$; cercando una soluzione particolare del tipo $y = ax + b$ otteniamo $a = -2/3$ e $b = -11/9$, e dunque la soluzione della non omogenea è
$$y = ae^{-x} + be^{3x} - \frac{6x+11}{9}$$
con $a, b \in \mathbb{R}$, ed il suo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine 2 è
$$y = \Big(a + b - \frac{11}{9}\Big) + \Big(-a + 3b - \frac{2}{3}\Big)x + \frac{a+9b}{2}x^2 + o(x^2)\ .$$
Dunque l'ordine di infinitesimo è massimo quando si annullano i primi due termini, vale a dire, per $a = 3/4$ e $b = 17/36$, nel qual caso la parte principale di y è $5x^2/2$.

Esiste tuttavia un'approccio più semplice che funziona per g qualunque, che non consiste nel risolvere esplicitamente l'equazione. Infatti, data una funzione $y(x)$, il suo sviluppo di Taylor al secondo ordine in 0 è $y(x) = y(0) + y'(0)x + y''(0)x^2/2 + o(x^2)$, ed in particolare abbiamo un'infinitesimo di ordine 2 (o più) solo se
$$y(0) = y'(0) = 0\ . \qquad (**)$$
D'altra parte, c'è solo una soluzione dell'equazione $(*)$ che soddisfa queste condizioni, ed è necessariamente quella con ordine di infinitesimo maggiore. Inoltre, una volta noti $y(0)$ ed $y'(0)$, la $(*)$ permette di ottenere $y''(0)$:
$$y''(0) = f(0) + 3y(0) + 2y'(0) = g(0)\ .$$
e ricordando la $(**)$, lo sviluppo al secondo ordine di y diventa
$$y(x) = \frac{g(0)}{2}x^2 + o(x^2)\ .$$
Questo risolve il problema quando $g(0) \neq 0$. Se invece $g(0) = 0$, sappiamo solo che y ha ordine di infinitesimo tre o più, e obbiamo quindi calcolare le successive derivate di y. Per fare questo, basta osservare che derivando k volte l'equazione $(*)$ si ottiene
$$y(k+2)(0) = g^{(k)}(0) + 3y^{(k)}(0) + 2y^{(k+1)}(0)\ .$$
Se allora g ha tutte le derivate in 0 nulle fino all'n-esima esclusa, si vede che y ha tutte le derivate in 0 nulle fino all'$(n+2)$-esima esclusa, mentre la $(n+2)$-esima è uguale a $g^{(n)}(0)$. Quindi
$$y(x) = \frac{g^{(n)}(0)}{(n+2)!}x^{n+2} + o(x^{n+2})\ .$$
In particolare, per $g(x) = x^n$ otteniamo $y(x) = (n+2)(n+1)x^{n+2} + o(x^{n+2})$. Infine, se g ha tutte le derivate in 0 nulle (e questo può succedere anche se g non è la funzione zero), lo stesso vale per y, che ha quindi ordine di infinitesimo $+\infty$.
3. Gli insiemi C e C' sono due cilindri illimitati (pieni) di raggio 1 ed assi z e y, rispettivamente. Il solido C'', viceversa, è difficile da disegnare. Tutavia si vede immediatamente

che l'intersezione di C'' con il piano di equazione $x = a$ consiste dei punti (a, y, z) tali che $y^2 \leq 1 - a^2$ e $z^2 \leq 1 - a^2$. Nel piano yz, queste due disuguaglianze descrivono il quadrato con centro l'origine e lato $2\sqrt{1-a^2}$ (se $|a| \leq 1$, altrimenti si ha l'insieme vuoto). Quindi

$$\mathrm{vol}(C'') = \int_{-1}^{1} \mathrm{area}(C''_a)\, da = \int_{-1}^{1} 4(1-a^2)\, da = \frac{16}{3} .$$

4. a) Studiamo la funzione $f(x) = \tan x - ax$ nell'intervallo $[0, \pi/2)$. Si vede facilmente che per $a \leq 1$, $f'(x) = 1/\cos^2 x - a > 0$ per ogni $x > 0$, e quindi la funzione è strettamente crescente, e siccome $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x > 0$. Invece, se $a > 1$, $f'(x)$ è negativa per $x \leq \arccos(1/\sqrt{a})$ e positiva altrimenti, e quindi la funzione è strettamente decrescente in $I_1 := [0, \arccos(1/\sqrt{a})]$, e strettamente crescente in $I_2 := [\arccos(1/\sqrt{a}), \pi/2)$. In particolare, siccome $f(0) = 0$, f è negativa nel resto di I_1, assume un valore negativo nell'estremo sinistro di I_2 e tende a $+\infty$ in quello destro, e quindi assume il valore 0 una ed una sola volta in I_2.
   Riassumendo, il numero di soluzioni dell'equazione $\tan x = ax$ in $(0, \pi/2)$ è zero per $a \leq 1$, ed uno per $a > 1$. Inoltre, per $a > 1$, la soluzione x_a soddisfa $x_a > \arccos(1/\sqrt{a})$ e quindi tende a $\pi/2$ per $a \to +\infty$.
   Volendo precisare ulteriormente, se scriviamo x come $\pi/2 - y$, l'equazione diventa

$$g(y) = \frac{1}{a} \quad \text{dove si è posto } g(y) := \Big(\frac{\pi}{2} - y\Big) \tan y .$$

   Sostituendo a $g(y)$ il suo sviluppo di Taylor in 0 all'ordine 1, e cioé $\pi y/2$, otteniamo $y \sim 2/(\pi a)$ per $a \to +\infty$ (rendere rigoroso quest'ultimo passaggio non è però così facile). Concludendo,

$$x_a = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi a} + o(1/a) .$$

II PARTE, GRUPPO B.

1. Prendo $f(x) := x^3/(x-1)$, come per il gruppo A, e l'equazione diventa $f(x) = -a^2$. Siccome $-a^2 < 27/4$ per ogni a, l'equazione ha sempre una ed una sola soluzione.
2. Si procede come per il gruppo A. Anzi, le domande b) e c) sono le stesse, mantre per la a) si ottiene $y(x) = x^2/2 + o(x^2)$.
3. Uguale al gruppo A.
4. Uguale al gruppo A.

COMMENTI.

1. Esercizio 6, prima parte: molti hanno posto automaticamente a zero la costante che appare nella soluzione dell'equazione a variabili separabili, invece di usare la condizione iniziale per determinare quella giusta.
2. Esercizio 2a), seconda parte: molti hanno calcolato la soluzione generale dell'equazione omogenea, ne hanno scritto lo sviluppo di Taylor all'ordine 2, ma poi non hanno determinato per quali valori del parametro il suo ordine di infinitesimo risultava massimo.
3. Esercizio 3b), seconda parte: in molti hanno cercato di determinare la sezione di C'' a partire dal disegno. Invece, si trattava di procedere analiticamente. Altri sono stati messi incrisi dal sistema di disequazioni $y^2 \leq 1 - a^2$ e $z^2 \leq 1 - a^2$, e se la sono cavata osservando che questo implica (giustamente) $y^2 + z^2 \leq 2 - 2a^2$. Purtroppo questo significa che la sezione cercata è *contenuta* in un cerchio pieno di raggio $\sqrt{2 - 2a^2}$, ma non che è uguale!
4. Esercizio 4, seconda parte: si poteva cercare di risolvere l'esercizio dimostrando che la funzione $f(x) := \tan x/x$ è crescente. Per quanto ne so, questo è però difficile da dimostrare.