Elementi di Analisi Matematica II, Anno Accademico 2002-2003, Matematica

G. Albert, A. Briani, V.M. Tortorelli

I foglio di esercizi: V.M. Tortorelli
dal 20 febbraio 2003 al 25 febbraio 2003

Programma e materiale relativo ai corsi di Elemnti di Analisi Matematica I e II può essere reperito in rete selezionando nella Pagina del Dipartimento la voce Materiale Didattico (http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html) e quindi selezionando Elementi di Analisi Matematica Uno e Due A.A. 2002/03.

ESERCIZIO n. 1 Calcolare : $\dfrac{1}{4i-3},\ \dfrac{6i+4}{(7+3i)^2},\ (\sqrt{3}+i)^6,\ (1+i)^{60},\ |\pi-\sqrt{2}|,\ \left|\dfrac{1+i\sqrt{5}}{2+i\sqrt{5}}\right|$

Scrivere in coordinate polari i numeri complessi $2-i2,\ \sqrt{3}+i,\ \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3, (1-\sqrt{3})^{14}$

Calcolare : $((1+i)^n+(1-i)^n)\,,\ \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n$

Dimostrare : $\mathcal{I}mz=\dfrac{z-\overline{z}}{2i},\ \mathcal{R}ez=\dfrac{z+\overline{z}}{2},\ |z|^2=z\overline{z},\ \dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2},\ |z+w|\le|z|+|w|$

ESERCIZIO n. 2 Risolvere:
$z^5=\sqrt{3}-i,\ z^3=8,\ z^4+1=i\sqrt{3},\ z^2+5z+8=0,\ z^2+iz+i-3=0,\ z^3-3iz^2-4z+2i=0,$
$iz^3=|z|,\ \ z^2+|z|+1=0,\ \ z^2+\overline{z}^2=|z|^2,\ \ z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$
Disegnare le regioni del piano complesso ripettivamente specificate dalle seguenti condizioni:
$|z-1|\le 1-|z|,\ |z-\overline{z}|\le|z+\overline{z}|,\ \left|\frac{z-1}{z+1}\right|\le 1,\ |z|^4=z^2+\overline{z}^2$

ESERCIZIO n. 3 Dimostrare che se $z_1\cdot\ldots z_n\neq 0$ si ha: $|z_1+\ldots z_n|=|z_1|+\ldots|z_n| \iff \dfrac{z_i}{z_j}>0$
Se ne dia un'interpretazione geometrica.

ESERCIZIO n. 4 Si provi che il prodotto di somme di due quadrati di numeri interi è la somma di due quadrati di numeri interi.

ESERCIZIO n. 5
a- Dati $v,\,z,\,w\in\mathbf{C}$ si provi che l'area del triangolo che li ha come vertici è $\frac{1}{2}\left|\mathcal{I}m(w-v)\overline{(z-v)}\right|$

b- Dati due numeri complessi z e w si dia un'interpretazone geometrica a $\mathcal{R}ez\overline{w}$ e a $\mathcal{I}mz\overline{w}$.

ESERCIZIO n. 6 Le soluzioni di $z^n = 1$ sono $e_{h+1} = e^{i2\pi\frac{h}{n}}$, $0 \leq h < n$. Per quali h si ha che $\{e_{h+1}, \dots e_{h+1}^n\} = \{e_1, \dots e_n\}$?

ESERCIZIO n. 7

a- Si definisce $e^z = e^{\mathcal{R}e z} e^{i\mathcal{I}m z}$. Dato $z \in \mathbf{C}$ si trovino le soluzoni di $w = e^z$.

b- Si disegni la regione determinata da $|e^z - 1| \leq 1$ e la sua immagine tramite $z \mapsto e^z$.

ESERCIZIO n. 8

a- Si provi che un polinomio con coefficienti reali ha radici non reali complesse coniugate.

b- Si provi che ogni polinomio a coefficienti reali è prodotto di potenze di binomi di primo grado e di potenze di somme di numeri positivi con quadrati di binomi di primo grado.

c- Si trovi una primitiva di $\frac{1}{t^4+1}$.

ESERCIZIO n. 9 Una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{C}$ si dice derivabile se lo sono le sue componenti. In particolare $e(t) = e^{it}$ lo è ed è l'unica soluzione di $e'(t) = ie(t)$ per cui $e(0) = 1$.

Se $z^2 + bz + c = (z - \mu)(z - \lambda)$, si provi che tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale $u''(t) + bu'(t) + cu(t) = (D^2 + bD + cI)u(t) = 0$, sono del tipo $\alpha e^{i\mu t} + \beta e^{i\lambda t}$, o del tipo $\alpha e^{i\mu t} + \beta t e^{i\mu t}$, al variare di α e β tra tutti i numeri complessi.

ESERCIZIO n. 10

a- Dati α, $\beta \in \mathbf{C}$ e $\lambda \neq 1$ mostrare che $|z - \alpha| = \lambda|z - \beta|$ determina una circonferenza.

b- Cosa determina $|z - \alpha| = |z - \beta|$?

c- Le funzioni $z \mapsto \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ o sono costanti o trasformano cerchi e rette in cerchi o rette.

d- Trovare l'immagine del cerchio unitario e della bisettrice pricipale mediante l'applicazione $z \mapsto \frac{1}{2}(z + z^{-1})$.

ESERCIZIO n. 11 a- Identificando $\mathbf{C}$ con $\mathbf{R}^2$ e dato $w \in \mathbf{C}$ l'associazione $z \mapsto w \cdot z$ definisce un'applicazione lineare da $\mathbf{R}^2$ in se. Si caratterizzino le matrici reali 2×2 che corrispondono alla moltiplicazione per un numero complesso.

b- Da considerazioni elementari si ottiene che una trasformazione del piano in se che mantiene le distanze e ha tre punti fissi non allineati è l'identità.

c- Si provi che tutte e sole le trasformazioni del piano in se che mantengono le distanze e hanno l'origine fissa sono del tipo $z \mapsto w \cdot z$ o $z \mapsto w \cdot \overline{z}$, con $|w| = 1$. In particolare sono lineari.