Elementi di Analisi Matematica II, Anno Accademico 2002-2003, Matematica

G. Albert, A. Briani, V.M. Tortorelli

III foglio di esercizi: V.M. Tortorelli

dal 6 marzo 2003 al 13 marzo 2003

http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html $\longrightarrow$ El. di An. Mat. I e II A.A. 2002/03

ESERCIZIO n. 1

a - Calcolare i seguenti limiti senza usare le funzioni esponenziali e logaritmiche, cercando di usare la definizione di limite, diseguaglianze e le principali proprietà dei limiti:

$\sqrt[n]{a},\ a>0$; $\sqrt[n]{n}$, (si provi inoltre che è decrescente); $\sqrt[n]{n^k},\ k\in\mathbf{Z}$; $\left(1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n^2}\right)^n,\ a,\ b\in\mathbf{R}$;

$\dfrac{(n+1)^k-n^k}{n^{k-1}},\ k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$; $\sin a_n,\ \dfrac{\sin a_n}{a_n},\ \dfrac{1-\cos a_n}{{a_n}^2}$, $a_n\to 0$

b - Calcolare gli stessi usando gli elementi di calcolo noti.

ESERCIZIO n. 2 Calcolare i limiti delle seguenti successioni

$\sqrt[n]{n!}$; $\sqrt[n]{a^n+b^n},\ a\geq|b|$; $\sqrt[n]{2^n+6^{n^2}}$; $\sqrt[n]{3^n+2^{2n+3}}$; $\sqrt[n]{\sqrt{n}-2\cdot\sqrt[3]{n-1}}$, $(1+\frac{1}{n^2})^n$, $(1-\frac{1}{n^2})^n$, $(\cos\frac{1}{n})^n$, $(\cos\frac{1}{\sqrt{n}})^n$, $(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^n$, $(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^n$, $(1+\frac{1}{n})^{n^2}$, $(1-\frac{1}{n})^{n^3}$, $(1+\frac{1}{2n-1})^n$

ESERCIZIO n. 3 Si provino le seguenti implicazioni, e si mostri che le implicazioni inverse non sono vere.

a - $b_n>0,\ \sqrt[n]{b_n}\longrightarrow l>1,\ (<1)\Rightarrow\ b_n\longrightarrow+\infty,\ (0)$ esponenzialmente.

b - $b_n>0,\ \dfrac{b_{n+1}}{b_n}\longrightarrow l>1,\ (<1)\Rightarrow\ b_n\longrightarrow+\infty,\ (0)$ esponenzialmente.

c - $a_n>0,\ a_n\longrightarrow l\in[0;+\infty]\Rightarrow\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n},\ \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\longrightarrow l.$

d - $a_n>0,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\longrightarrow l\in[0;+\infty]\Rightarrow\sqrt[n]{a_n}\longrightarrow l.$

e - $a_n\longrightarrow\pm\infty,\ a_{n+1}-a_n\longrightarrow l\in\overline{\mathbf{R}}\Rightarrow\dfrac{a_n}{n}\longrightarrow l.$

f * - $a_n\longrightarrow\substack{\pm\infty\\(0)},\ \substack{b_{n+1}>b_n\longrightarrow+\infty\\(b_n>b_{n+1}\longrightarrow 0)},\ \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\longrightarrow l\in\overline{\mathbf{R}}\ \Rightarrow\dfrac{a_n}{b_n}\longrightarrow l.$

ESERCIZIO n. 4 Calcolare il limiti all'infinito delle seguenti successioni (in alcuni casi converrà usare i crtieri del precedente esercizio):

$\dfrac{2^n n!}{n^n}$; $\dfrac{3^n n!}{n^n}$; $\dfrac{(n!)^2}{n^n}$; $\dfrac{(2n)!}{n^n}$; $\dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$; $\dfrac{(2n)!}{(2n)^n}$; $\dfrac{n2^n}{\binom{2n}{n}}$; $\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$; $\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n^n n!}}$; $k^n\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!},\ k\in\mathbf{R}\setminus\{4\}$;

$\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n^p},\ p\in\mathbf{Q}$; $\dfrac{n\log n}{\log n!}$; $\dfrac{1+2^k\ldots+n^k}{n^{k+1}}$; $\dfrac{1+\frac{1}{2}\ldots+\frac{1}{n}}{n}$

ESERCIZIO n. 5 Si provi che $4^n\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ è decrescente e che il suo estremo inferiore è non nullo.

ESERCIZIO n. 6

a - Si provi per induzione $n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

b - Utilizzando lo sviluppo di Taylor per $\log(1+x)$ si provi che per ogni $\alpha < \frac{1}{2}$:
definitivamente $1 \geq (n+\alpha)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ e quindi definitivamente $n!\left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{n^\alpha}$ è crescente.

ESERCIZIO n. 7

Si calcoli il limite $l \in \mathbf{R}$ di $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{x}{a_n}}{2} \\ a_1 > 0, \ a_1^2 > x > 0 \end{cases}$. Si valuti l'infinitesimo $|a_n - l|$.

Si provi che $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ ove: $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & \text{se } n \geq 1 \\ a_1 < b_1 \end{cases}$

Si provi che la successione $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} & \text{se } n \geq 1 \\ a_1 = 1, \end{cases}$ diverge. Si calcoli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^k}, \ k \in \mathbf{N}$

ESERCIZIO n. 8 * Studiare la convergenza della successione: $\begin{cases} a_{n+1} = \alpha^{a_n} & \text{se } n \geq 1 \\ a_1 = \alpha > 0 \end{cases}$

ESERCIZIO n. 9

a - Dato $M > 0$, studiare la convergenza $\begin{cases} a_{n+1} = a_n - M{a_n}^2 & \text{se } n \geq 1 \\ a_1 = \alpha \end{cases}$

b * - Studiare la convergenza di $n^\beta a_n$.

ESERCIZIO n. 10 Si consideri la successione $\sqrt{n} - [\sqrt{n}]$, $n \in \mathbf{N}$.

a - Si provi che non converge.

b * - Quali sono tutti i valori limite di sottosuccessioni della successione data?

ESERCIZIO n. 11 Una successione di numeri complessi $z_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$ converge ad un numero complesso $z \in \mathbf{C}$ se e solo se: $\forall\, \varepsilon\ \exists \nu\ \forall n \geq \nu\ |z_n - z| \leq \varepsilon$, cioè se e solo se $|z_n - z| \to 0$. Provare:

a - $z_n \to z \Leftrightarrow \mathcal{R}e z_n \to \mathcal{R}e z$ e $\mathcal{I}m z_n \to \mathcal{I}m z \Leftrightarrow |z_n| \to |z|$ e $\arg z_n + 2k_n\pi \to \arg z$.

b - se $z = x+iy \in \mathbf{C}$, $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \to e^x(\cos y + i\sin y)$. (Si assuma che $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \to e^a, \ a \in \mathbf{R}$).