Elementi di Analisi Matematica II, Anno Accademico 2002-2003, Matematica

G. Albert, A. Briani, V.M. Tortorelli

VI foglio di esercizi: V.M. Tortorelli

dal 30 aprile 2003 al 8 maggio 2003

http://WWW.dm.unipi.it/didactics/home.html $\longrightarrow$ El. di An. Mat. I e II A.A. 2002/03

ESERCIZIO n. 1

a - Si studi la convergenza delle seguenti serie:

$\sum_n e^{\frac{1}{n}}$, $\sum_n(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})$, $\sum_n \sin\frac{1}{n}$, $\sum_n(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})$, $\sum_n(1-\cos\frac{1}{n})$, $\sum_n \frac{\alpha n^\beta - n}{n^{\frac{4}{3}}+\sqrt{n}}$ $(\alpha,\ \beta\in\mathbf{R})$, $\sum_n \frac{e^n-n^6}{e^{2n}+n}$,

$\sum_n \sin^2 n$, $\sum_n(\sqrt[n]{n}-1)$, $\sum_n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right)$, $\sum_n\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right)$, $\sum_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $\sum_n \frac{n!+n^2}{3^n+n^n}$,

$\sum_n \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$, $\sum_n \frac{n!}{n^n}$, $\sum_n \frac{n^n}{3^n n!}$, $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ $(x\in\mathbf{R})$, $\sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_n n^n x^{n!}$ $(x\in\mathbf{R})$, $\sum_n a_n : \begin{cases} a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_{n-1}} \\ a_1=2,\ a_2=1\end{cases}$

$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$ $(\alpha,\beta\in\mathbf{R})$,

$\sum_n\sum_{k=n}^{n^2} e^{-k}$, $\sum_n\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n^k}$, $\sum_n\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n\,dx$, $\sum_n\int_0^3\frac{\sin(t^{n^2})}{t^{n^2}}\,dt$, $\sum_n\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

b - Stabilre se i seguenti integrali generalizzati sono convergenti:

$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$, $\int_0^\infty\frac{(2+\cos x)\log x}{x^\alpha}dx$ $\quad(\alpha\in\mathbf{R})$, $\int_1^\infty\frac{e^x\arctan x}{((2x)^x-1)^2}\,dx$, $\int_0^\infty\left(1-\sqrt{\frac{t}{t+1}}\right)dt$,

$\int_1^\infty\frac{e^{-x^2}x^x-e^{x-2}}{1-x^x}dx$, $\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x^3-x^2}}dx$, $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{1}{\log(\cos x^2)^{\frac{1}{3}}}dx$, $\int_1^\infty\left((x^8-1)^{-\frac{1}{9}}-x^{-\frac{8}{9}}\right)dx$.

$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^\alpha|\log|x||^\beta}dx$, $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x^\alpha|\log|x||^\beta}dx$, $\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x^\alpha|\log|x||^\beta}dx$, $\int_{\frac{3}{2}}^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha|\log|x||^\beta}dx$ $(\alpha,\beta\in\mathbf{R})$,

$\int_0^1\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x\log(1+\sqrt{x})}\,dx$, $\int_0^1\frac{1-(\cos x)^{\frac{1}{4}}\ +\ \log(1+x^{\frac{1}{2}})}{(\sin x+1-e^{\frac{x}{2}})^{\frac{1}{2}}}\,dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan x}{((2x)^x-1)^2}\,dx$, $\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}-\frac{1}{\log(x+1)-\log x}\right)dx$

$\int_0^1\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\mathrm{arsin}x}\,dx$, $\int_0^\pi\frac{1}{1-|\cos(x^\alpha)|}$ $(\alpha\in\mathbf{R})$, $\int_{-1}^1|x|^{\frac{1}{2}\left(\alpha\frac{x}{|x|}-1\right)}dx$ $(\alpha\in\mathbf{R})$, $\int_0^{+\infty}\left(\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)^{\frac{1}{x}}-1\right)dx$

ESERCIZIO n. 2

a - Si provi che le serie di Taylor di centro 0 di $x\mapsto\log(1+x)$ è convergente alla funzione stessa per $|x|<1$.

b - Si provi che le serie di Taylor di centro 0 delle funzioni $x\mapsto e^x$, $\sin x$, $\cos x$ sono assolutamente convergenti per ogni $x\in\mathbf{R}$, e quindi che rispettivamente convergono alle funzioni di cui sono sviluppo.

c - Si provi che il resto dello sviluppo di Taylor in 0 di grado $2n+2$ della funzione $x\mapsto\mathrm{artan}x$ è in modulo minore di $\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$. (Per esempio si può usare la serie gometrica di ragione $-x^2$).

d - Si trovi una funzione la cui serie di Taylor in 0 converge per ogni $x\in\mathbf{R}$, ma non converge alla funzione stessa.

ESERCIZIO n. 3* Si pone $\binom{\alpha}{n}=\dfrac{\alpha\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$, $\alpha\in\mathbf{C}$, $n\in\mathbf{N}$. Si calcoli lo sviluppo di Taylor in 0 della funzione $x\mapsto(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}$ e si provi che converge alla funzione stessa per $|x|<1$.

ESERCIZIO n. 4 Si ocnsideri $x \mapsto \int_0^{\tan x} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

a - Si provi che tale funzine può essere estesa con continuità a tutto $\mathbf{R}$.
b*- Si studi la derivabiltà di tale estensione.

ESERCIZIO n. 5
Posto $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$, si studi il limite del rapporto $\frac{F(x)}{f(x)}$, $x \to +\infty$, nei seguenti casi: $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $f(x) = xe^{x^2}$, $f(x) = \log x$.

ESERCIZIO n. 4 Sia $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$, $n \geq 0$.

a - Si provi che $1 \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ e quindi $a_{2m} = \frac{\pi}{2} \frac{(2m-1)(2m-3)...5\cdot 3}{2m(2m-2)...4\cdot 2}$, $a_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)...4\cdot 2}{(2m+1)(2m-1)...5\cdot 3}$.
b - Si deduca che $\lim_{m\to\infty} \frac{2m(2m-2)...4\cdot 2}{(2m-1)(2m-3)...5\cdot 3} \frac{1}{\sqrt{2m+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ [Formula di Wallis].

ESERCIZIO n. 5
a - Si provi che $\left(\frac{n}{e}\right)^n e \leq n! \leq \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e$, valutando $\int_1^n \log x\, dx \leq \log n! \leq \int_1^n \log x\, dx +$ somma di aree di triangoli.
b - Si provi che $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} e^{1-D_n}$, si dia un interpretazione geometrica alla successione D_n mostrando tra l'altro che è crescente.
c - Detto D il limite di D_n si provi che $D - D_n \leq \log\sqrt{1+\frac{1}{2n}}$.
d - Usando la formula di Wallis si provi che $e^{1-D} = \sqrt{2\pi}$ e quindi la formula di Stirling $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{1+\frac{1}{2n}}$.

ESERCIZIO n. 6
a - Si consideri $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$, $\alpha > 0$. Si provi che è ben definito e quindi che $\Gamma(n) = (n-1)!$ per $n \in \mathbf{N}$.
b - Sia $\Lambda(\beta) = \displaystyle\int_1^2 e^{-x} x^\beta dx$, $\beta \in \mathbf{R}$. Si provi che è derivabile con derivata eguale a $\displaystyle\int_1^2 e^{-x} x^\beta \log x dx$.
c - Si studi il caso $\Lambda(\beta) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x} x^\beta dx$.

ESERCIZIO n. 7 Si considerino gli integrali

$$\frac{1}{3}T(\kappa) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}\cdot\sqrt{1-\kappa^2 t^2}}\, dt \quad , \qquad \kappa \in [0;1[.$$

a) Si calcoli $T(0)$ e si provi che per ogni $\kappa \in [0;1[$ tali integrali sono finiti.
b) Si studi al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ il comportamento di $(T(\kappa) - T(0)) \cdot \kappa^{-\alpha}$ per $\kappa \to 0$.

ESERCIZIO n. 8

questioni numeriche
funzioni continue mai derivabili
insiemi di cantor
funzioni definite con integrali o serie
serie di errori di successioni definite per ricorrenza

ESERCIZIO n. 9