Secondo modulo, secondo compitino, 22 maggio 2003 – Testi

I Parte, gruppo A.

1. Sia $f_a(x) := x^{-a}\arctan(e^x)$. Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il limite di f_a a $+\infty$ è zero, e per quali l'integrale di f_a da 1 a $+\infty$ risulta finito.
2. Sia $n \geq 2$ un intero fissato. Per ciascuno dei seguenti insiemi di matrici $n \times n$, dire se è finito, numerabile o più che numerabile:
   a) matrici con coefficienti 0 oppure 1;
   b) matrici con coefficienti reali e traccia nulla;
   c) matrici con coefficienti complessi e determinante nullo;
   d) matrici con coefficienti interi.
3. Dire quali delle seguenti serie risultano convergenti
$$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{2^n n} \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{2^n}{n} \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{2^n}{n!}\ .$$
4. Calcolare, per $t > 0$, l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x e^{-tx} dx$.
5. Sia A l'insieme dei numeri e^{-n} con $n \in \mathbb{N}$. Determinarne estremo inferiore e superiore, e dire se si tratta di minimo e massimo.
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_0^{+\infty} 2^n(2+\cos n)\, x^n$.
7. Calcolare (in forma cartesiana) il numero $\big(1+\sqrt{3}i\big)^6$.
8. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

I Parte, gruppo B.

1. Sia $f_a(x) := x^a e^{-x}$. Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il limite di f_a a $+\infty$ è zero, e per quali l'integrale di f_a da 1 a $+\infty$ risulta finito.
2. Sia $n \geq 2$ un intero fissato. Per ciascuno dei seguenti insiemi di matrici $n \times n$, dire se è finito, numerabile o più che numerabile:
   a) matrici con coefficienti razionali;
   b) matrici con coefficienti ± 1 e traccia nulla;
   c) matrici triangolari superiori con coefficienti complessi;
   d) matrici con coefficienti reali e invertibili.
3. Dire quali delle seguenti serie risultano convergenti
$$\sum_1^{+\infty} \frac{3^n}{(2n)!} \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{1}{3^n 2n} \qquad \sum_1^{+\infty} \frac{3^n}{2n}\ .$$
4. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{|\log x|^a}{x}\, dx$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
5. Sia A l'insieme dei valori di e^x con $x \in (-\infty, 1]$. Determinarne estremo inferiore e superiore, e dire se si tratta di minimo e massimo.
6. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_0^{+\infty} n(2-\cos n)\, x^n$.
7. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^4 = -4$.
8. Dare un esempio di serie a termini reali che non diverge a $\pm\infty$ né converge.

II Parte, gruppo A.

1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie $\displaystyle\sum_2^{+\infty} \big[(n^2-1)^a - (n^2+1)^a\big]$.
2. Dati $\alpha, \beta > 0$, si ponga
$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0, \\ x^\alpha \sin(1/x^\beta) & \text{per } x > 0. \end{cases}$$
   Dire per quali α e β si verificano le seguenti condizioni:
   a) $f(x)$ é continua in $[0, +\infty)$,
   b) $f(x)$ é derivabile in $[0, +\infty)$,
   c) $f'(x)$ é continua in $[0, +\infty)$,
   d) $f(x)$ é derivabile due volte in $[0, +\infty)$.
   Fissato $\beta = 1$ ed n intero con $n \geq 2$, dire per quali α si ha che:
   e) $f(x)$ é derivabile n volte in $[0, +\infty)$,
   f) $D^n f(x)$ é continua in $[0, +\infty)$.
3. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   a) Dimostrare che se f è di classe C^1 ed esiste $L := \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x)$, allora $L = 0$.
   b) Far vedere con un esempio che se f è di classe C^1 non è detto che L esista.
   c) Dimostrare che se f è di classe C^2 e $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f''(x)|\, dx < +\infty$, allora L deve esistere.
   d) Dimostrare che se f è di classe C^2 e $|f''(x)| \leq 1$, allora L deve esistere.
4. a) Sia $q := \underbrace{99\cdots99}_{h \text{ cifre}}$ con $h \geq 1$. Dimostrare che $1/q = 0,\underbrace{00\cdots01}_{h \text{ cifre}}\underbrace{00\cdots01}_{h \text{ cifre}}\cdots$
   b) Dimostrare che ogni numero con rappresentazione decimale periodica è razionale.
   c) Dimostrare che la rappresentazione decimale di ogni numero razionale è periodica.

II Parte, gruppo B.

1. Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie $\displaystyle\sum_1^{+\infty} \big[(n+2)^a - n^a\big]$.
2. Uguale al gruppo A
3. Uguale al gruppo A
4. Uguale al gruppo A

I PARTE, GRUPPO A.

1. f_a converge a 0 per $a > 0$ ed è integrabile per $a > 1$.
2. a) finito, b) più che numerabile, c) più che numerabile, d) numerabile.
3. Le seconda no e le altre due sì (per esempio, per il criterio del rapporto).
4. $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-tx}dx = \Big|x\frac{e^{-tx}}{-t}\Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{e^{-tx}}{-t}dx = \Big|x\frac{e^{-tx}}{t}\Big|_\infty^1 + \Big|\frac{e^{-tx}}{t^2}\Big|_\infty^1 = \frac{e^{-tx}(1+t)}{t^2}.$
5. Siccome la successione e^{-n} è *strettamente* decrescente, $e^0 = 1$ è il massimo valore raggiunto, mentre $e^{-\infty} = 0$ è l'estremo inferiore (mai raggiunto).
6. Siccome $1 \le 2 + \cos n \le 3$, allora $2 \le \sqrt[n]{2^n(2+\cos n)} \le 2\sqrt[n]{3} \to 2$ e dunque $R = 1/2$.
7. $\big(1+\sqrt{3}i\big)^6 = \big(2e^{i\pi/3}\big)^6 = 2^6e^{2\pi i} = 64$.
8. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f.

I PARTE, GRUPPO B.

1. f_a converge a 0 ed è integrabile per ogni a reale (e.g., perché $x^ae^{-x} = o(1/x^2)$ per ogni a).
2. a) numerabile, b) finito, c) più che numerabile, d) più che numerabile.
3. Le prime due sì e l'ultima no (per esempio, per il criterio del rapporto).
4. $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{|\log x|^a}{x}dx = \int_{-\infty}^{-1} |t|^a dt = \int_1^\infty t^a dt = \begin{cases} +\infty & \text{per } a \ge -1 \\ -1/(a+1) & \text{per } a < -1 \end{cases}.$
5. Siccome la funzione e^x è crescente, $e^1 = e$ è il massimo valore raggiunto, mentre $e^{-\infty} = 0$ è l'estremo inferiore (mai raggiunto).
6. Siccome $1 \le 2 - \cos n \le 3$, allora $\sqrt[n]{n} \le \sqrt[n]{n(2-\cos n)} \le \sqrt[n]{3n}$ e convergono tutti a 1. Dunque $R = 1$.
7. Posto $z = \rho e^{i\theta}$, $z^4 = 14$ diventa $\rho^4 e^{i4\theta} = 4e^{i\pi}$. Dunque $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \pi/4 + k\pi/2$ con $k = 0,1,2,3$. Ovvero $z = \pm 1 \pm i$.
8. $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n$.

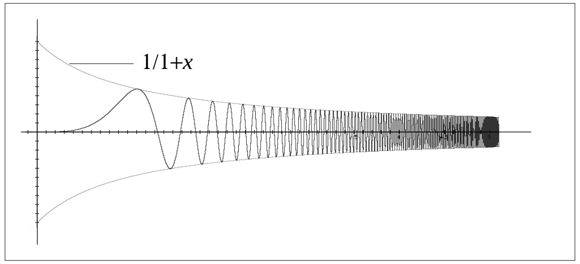
II PARTE, GRUPPO A.

1. Per prima cosa determinianmo il comportamento asintotico del termine generico $x_n := (n^2-1)^a - (n^2+1)^a$. Raccogliendo n^{2a} ed applicando quindi la formula $(1+x)^b = 1+bx+o(x)$ per $x \to 0$ otteniamo
$$\begin{aligned} x_n &= n^{2a}\Big[\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)^a - \Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^a\Big] \\ &= n^{2a}\Big[1 - \frac{a}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)^a - 1 - \frac{a}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)^a\Big] \\ &\sim -2an^{2(a-1)} . \end{aligned}$$
Escludendo il caso $a = 0$, che da luogo alla serie nulla, si vede dunque che il segno di x_n è definitivamente costante (positivo per $a < 0$ e negativo per $a > 0$) ed è dunque possibile applicare i teoremi di confronto asintotico (con le serie armoniche). In particolare $\sum x_n$ converge quando $2(a-1) < -1$, ovvero $a < 1/2$, e diverge a $-\infty$ quando $2(a-1) \ge -1$, ovvero $a \ge 1/2$.

2. L'osservazione da tenere a mente è che il limite di $x^\gamma \sin(1/x^\beta)$ per $x \to 0^+$ esiste se e solo se $\gamma > 0$, ed in tal caso è uguale a 0. Lo stesso discorso vale per $x^\gamma \cos(1/x^\beta)$. Inoltre, siccome la funzione f è di classe C^∞ su $(0,+\infty)$, basta solo verificare derivabilità e continuità in 0. Detto questo si vede facilmente che:
a) f continua in 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$;
b) f derivabile in 0 $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)/x \Leftrightarrow \alpha > 1$ (ed allora $f'(0) = 0$).
Inoltre, tenendo conto della formula
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos(1/x^\beta) + \alpha x^{\alpha-1}\sin(1/x^\beta)\big) \\ &= -\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos(1/x^\beta) + o(x^{\alpha-\beta-1}) , \end{aligned}$$
c) f' continua in 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha > \beta + 1$.
d) f' derivabile in 0 $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)/x \Leftrightarrow \alpha > \beta + 2$ (ed allora $f''(0) = 0$).
Per affrontare il caso generale, abbiamo bisogno di un'espressione maneggevole della derivata n-esima di f. Facendo un po' di tentativi, ci si rende conto che
$$D^n f(x) = \begin{cases} +\beta^n x^{\alpha-n\beta-n}\sin(1/x^\beta) + R_n(x) & \text{per } n \text{ pari,} \\ -\beta^n x^{\alpha-n\beta-n}\cos(1/x^\beta) + R_n(x) & \text{per } n \text{ dispari,} \end{cases} \tag{1}$$
con $R_n(x) = o(x^{\alpha-n\beta-n})$. Prima di dimostrare la formula (1), facciamo vedere che ci basta per concludere l'esercizio. In effetti, per induzione su n vediamo subito che
e) $D^n f$ derivabile in 0 $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0^+} D^{n-1}f(x)/x \Leftrightarrow \alpha > n(\beta+1) - \beta$ (ed allora $D^n f(0) = 0$);
f) $D^n f$ continua in 0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} D^n f(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha > n(\beta + 1)$.
Per concludere, non ci resta che dimostrare la (1). Sfortunatamente, cosí com'è enunciata, non possiamo dimostrarla per induzione, perché sapere che R_n è trascurabile rispetto a $x^{\alpha-n(\beta+1)}$ non ci da alcuna informazione sulla derivata di R_n. Consideriamo quindi un enunciato più preciso sulla struttura del resto, e cioé R_n è della forma
$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{\alpha-k\beta-n} P_{n,k}(1/x^\beta)$$
con $P_{n,k}$ combinazione lineare di seni e coseni. Ora la dimostrazione di uno (1) viene facilmente per induzione su n.

3. a) Usando de L'Hôpital ed il fatto che f tende a 0, si vede che
$$L = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 .$$
Un'altra dimostrazione (meno astuta) è questa: supponiamo per assurdo che sia $L > 0$. Allora esiste x_0 tale che $f'(x) \ge L/2 > 0$ per $x \ge x_0$, e dunque $f(x) \ge f(x_0) + L(x - x_0)/2$ che tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, contraddicendo l'ipotesi che f tenda a 0. Analogamente si dimostra che L non può essere negativo.

b) Ad esempio $f(x) := \dfrac{\sin(x^4)}{1+x}$.



c) Se $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f''(x)|\,dx$ è finito, allora deve esiste l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f''(x)\,dx = \Big|f'(x)\Big|_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} f'(x) - f'(0) \ .$$

d) dall'esempio nel punto b) si intuisce che il limite della derivata f' può non esistere solo in presenza di oscillazioni sempre più frequenti (anche se di ampiezza sempre minore) nella funzione f, cosa che richiede sempre più frequenti cambi di segni di f'. Il fatto che f'' è limitata dovrebbe quindi prevenire questo fenomeno. Come faremo vedere ora, basta di meno, e cioé che f' sia uniformemente continua (ricordiamoci che f'' limitata implica infatti f' Lipschitziana).
Fissiamo $d > 0$, e consideriamo un punto x tale che $f'(x) \ge d$. Applicando la definizione di uniforme continuità con $\varepsilon = d/2$, otteniamo che deve esistere $\delta > 0$, che dipende da d ma non da x, tale che

$$|f'(t) - f(x)| \le d/2 \quad \text{per } t \in [x-\delta, x+\delta];$$

in particolare $f'(t) \ge f'(x) - d/2 \ge d/2$ per $t \in [x, x+\delta]$, e dunque

$$f(x+\delta) - f(x) \ge d\delta/2 \ . \tag{2}$$

Siccome $f(x)$, e quindi anche $f(x) - f(x+\delta)$, tendono a 0 per $x \to +\infty$, mentre invece $d\delta/2$ è un numero positivo fissato, la disuguaglianza (2) implica che $f'(x)$ non può assumere il valore d per x aribitrariamente grandi. Lo stesso discorso vale per i valori $d < 0$, e se ne deduce che $f'(x)$ tende a 0.

4. a) Dato $h > 0$ intero, poniamo

$$q_h := \big[\underbrace{9\,9\cdots 9\,9}_{h\ \text{cifre}}\big] \quad \text{e} \quad y_q := \big[0,\underbrace{0\,0\cdots 0\,1}_{h\ \text{cifre}}\underbrace{0\,0\cdots 0\,1}_{h\ \text{cifre}}\cdots\big]$$

(per evitare confusione, mettiamo l'espressione decimale di un numero reale tra parentesi quadre). Allora

$$y_h = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-nh} = 10^{-h}\sum_{n=0}^{\infty}(10^{-h})^n = \frac{10^{-h}}{1-10^{-h}} = \frac{1}{10^h - 1} = \frac{1}{q_h} \ .$$

b) Per numero periodico (positivo) intendiamo un numero reale x la cui espressione decimale si ripete *da un certo un punto in poi* con periodo di lunghezza h, cioé un numero della forma

$$x = \big[b_0,\underbrace{b_1\,b_2\cdots b_k}_{k\ \text{cifre}}\underbrace{a_1\,a_2\cdots a_h}_{h\ \text{cifre}}\underbrace{a_1\,a_2\cdots a_h}_{h\ \text{cifre}}\cdots\big]$$

con b_0 intero, b_i ed a_i cifre tra 0 e 9, k intero positivo o nullo. Posti dunque

$$b := \big[b_0, b_1\cdots b_k\big] = b_0 + \sum_1^k b_i 10^{-i} \quad \text{e} \quad a := \big[a_1\cdots a_n\big] = \sum_1^h a_i 10^{h-i} \ ,$$

x si scrive come $x = b + 10^{-k} a\, y_h$ ed è quindi razionale.
c) Ogni numero razionale x si può scrivere come

$$x = \frac{m}{10^k n} = m\cdot 10^{-k}\cdot n^{-1}$$

con m intero, k intero positivo o nullo, ed n intero positivo primo con 10. Supponiamo ora di sapere che n divide q_h per qualche h, ovvero $q_h = n\cdot m'$: allora

$$x = m\cdot m'\cdot 10^{-k}\cdot q_h^{-1} = m\cdot m'\cdot 10^{-k}\cdot y_h$$

ed essendo y_h un numero periodico, anche x resta periodico (stiamo usando il fatto che moltiplicare un numero periodico per una potenza di 10 oppure per un numero intero dà un numero periodico).
Non ci resta che dimostrare che dato n intero positivo primo con 10 esiste h tale che n divide $q_h = 10^h - 1$, ovvero $10^h \equiv 1 \pmod n$. Ma questo segue dal fatto che l'insieme dei numeri interi compresi tra 0 ed $n-1$ e primi con n è un gruppo finito rispetto alla moltiplicazione modulo n. In particolare, basta prendere h uguale all'ordine del gruppo (un numero sicuramente minore di n).

II Parte, gruppo B.

1. Si procede come per il gruppo A, ottenendo, per $a \ne 0$, $x_n = [(n+2)^a - n^a] \sim 2an^{a-1}$ (per $a = 0$ si ha la serie nulla). Dunque la serie converge per $a \le 0$ e diverge a $+\infty$ per $a > 0$. In questo caso, inoltre, il valore della serie può essere clacolato esattamente, infatti

$$\begin{aligned}\sum_1^m x_n &= (3^a - 1) + (4^a - 2^a) + (5^a - 3^a) + (6^a - 4^a) + \cdots \\ &= -1 - 2^a + (m+1)^a + (m+2)^a \ .\end{aligned}$$

che converge a $-1 - 2^a$.

2. Uguale al gruppo A.
3. Uguale al gruppo A.
4. Uguale al gruppo A.

Commenti.

- Esercizio 4B, prima parte: la presenza del modulo nell'integrale sembra aver creato molti (inspiegabili?) problemi.
- Esercizio 8A, prima parte: si potevano dare diverse risposte, ma molti hanno scritto enunciati troppo approssimativi, omettendo ad esempio l'ipotesi (essenziale) che f sia continua.
- Esercizio 1, seconda parte: pochi scrivono sviluppo asintotico di del termine generico della serie, che pure darebbe facilmente la risposta cercata.

- Esercizio 2, seconda parte: i punti e) ed f) sono facili da dimostrare una volta trovata l'espressione giusta per la derivata n-esima di f. Questa espressione si indovina facilmente, ma resta difficile da dimostrare in modo rigoroso.
- Esercizio 3, seconda parte: nessuno ha dimostrato il punto d), anche se in due hanno suggerito che la chiave di tutto è l'uniforme continuità di f' (cosa di cui noi non ci eravamo accorti).
- Esercizio 4, seconda parte: per il punto a), il trucco è scrivere y_h come serie geometrica, invece di cominciare da q_h. Una volta ottenuto a), quasi tutti hanno dimostrato anche b), anche se spesso in modo un po' impreciso (ad esempio, dimenticando che un numero periodico può avere un antiperiodo) o farraginoso. I pochi che hanno dimostrato il punto c) hanno fatto ricorso all'algoritmo della divisione, con le inevitabili difficoltà che questa scelta comporta.