Secondo modulo, primo compitino, 3 aprile 2003 – Testi

I Parte, gruppo A.

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f definita da
$$f(x) := \begin{cases} ae^x & \text{per } x \le 0 \\ \frac{e^{bx}-1}{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$
è continua su tutto $\mathbb{R}$.
2. Calcolare (in forma cartesiana) il numero $(1-i)^{10}$.
3. Dire quali dei seguenti insiemi infiniti sono numerabili e quali no:
(a) l'insieme dei numeri primi;
(b) l'insieme dei numeri irrazionali;
(c) l'insieme delle radici quadrate di numeri razionali.
4. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $1 \le |z+1-i| \le \sqrt{2}$.
5. Calcolare il limite di $\sqrt[n^2]{n!}$ per $n \to +\infty$.
6. Dare un'esempio (anche con un disegno) di funzione continua f su $(0,1]$ che
a) non ammette massimo;
b) non ammette né massimo né minimo.
7. Determinare l'estremo superiore ed inferiore di $A := \Big\{\exp\Big(\dfrac{4n^2-1}{4n^2}\Big) : \ n = 1, 2, \dots\Big\}$.
8. Scrivere la definizione di successione di Cauchy.

I Parte, gruppo B.

1. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f definita da
$$f(x) := \begin{cases} a\sin x & \text{per } x \le 0 \\ \frac{e^{bx}-1}{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$
è continua su tutto $\mathbb{R}$.
2. Calcolare (in forma cartesiana) il numero $(i-1)^{10}$.
3. Dire quali dei seguenti insiemi infiniti sono numerabili e quali no:
(a) l'insieme delle potenze intere di due;
(b) l'insieme delle radici cubiche di numeri razionali;
(c) l'insieme dei numeri reali non interi.
4. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $1 \le |z+1+i| \le \sqrt{2}$.
5. Calcolare il limite di $\sqrt[n^3]{n!}$ per $n \to +\infty$.
6. Dare un'esempio (anche con un disegno) di funzione continua f su $[0,1)$ che
a) non ammette minimo;
b) non ammette né massimo né minimo.
7. Determinare l'estremo superiore ed inferiore di $A := \Big\{\log\Big(\dfrac{4n^2-1}{4n^2}\Big) : \ n = 1, 2, \dots\Big\}$.
8. Scrivere la definizione di maggiorante e di estremo superiore di un insieme.

II Parte, gruppo A.

1. Dire quali dei seguenti insiemi infiniti sono numerabili e quali no:
a) la famiglia X_1 dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con 5 elementi;
b) la famiglia X_2 dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$;
c) l'insieme X_3 delle successioni (x_n) tali che $x_n \in \mathbb{Z}$ per ogni n, e $x_n \to 0$;
d) l'insieme X_4 delle successioni definite come in c) sostituendo a $\mathbb{Z}$ l'insieme dei reciproci dei numeri naturali.
2. Dato un numero reale y e due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y^- := \max\{-y, 0\}$ è la parte negativa di y, e $\min\{f, g\}$ la funzione data da $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$.
a) Dimostrare che se f è continua allora $|f|$ ed f^- sono continue.
b) È vero che se $|f|$ è continua allora f è continua?
c) È vero che se $|f|$ ed f^- sono continue allora f è continua?
d) Dimostrare che se f e g sono continue, allora $\min\{f, g\}$ è continua.
3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data data da $f(x) := x^5 + 3x^3 + 2x - 6$. Dimostrare che f è iniettiva e surgettiva e calcolare $\lim f^{-1}(1/\log y)$ per $y \to +\infty$.
4. Sia a un numero positivo, e sia (x_n) la successione definita per ricorrenza come segue:
$$x_1 := 1 \ \text{ e } \ x_{n+1} := x_n + a^n e^{-x_n} \ \text{ per ogni } n \ge 1.$$
Dimostrare che (x_n) è crescente per ogni a. Dire quindi se il limite di (x_n) è finito o infinito nei seguenti casi: a) $a = 1$; b) $a > 1$; c) $a < 1$.
5. Sia L un numero finito, e sia (x_n) una successione di numeri reali. Poniamo
$$y_n := \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \quad \text{e} \quad z_n := \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{4n}}{3n}.$$
a) Dimostrare che $x_n \to L$ implica $y_n \to L$ e $z_n \to L$.
b) Far vedere che se y_n (o z_n) converge non è detto che x_n converga.
c) Dimostrare che $y_n \to L$ implica $z_n \to L$.
d) Far vedere che in generale se z_n converge non è detto che y_n converga.

II Parte, gruppo B.

1. Dire quali dei seguenti insiemi infiniti sono numerabili e quali no:
a) la famiglia X_1 dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con 6 elementi;
b) la famiglia X_2 dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$;
c) l'insieme X_3 delle successioni (x_n) tali che $x_n \in \mathbb{N}$ per ogni n, e $x_n \to 0$;
d) l'insieme X_4 delle successioni definite come in c) sostituendo a $\mathbb{N}$ l'insieme delle potenze intere negative di 2.
2. Dato un numero reale y e due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y^+ := \max\{y, 0\}$ è la parte positiva di y, e $\max\{f, g\}$ la funzione data da $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$.
a) Dimostrare che se f è continua allora $|f|$ ed f^+ sono continue.
b) È vero che se $|f|$ è continua allora f è continua?
c) È vero che se $|f|$ ed f^+ sono continue allora f è continua?
d) Dimostrare che se f e g sono continue, allora $\max\{f, g\}$ è continua.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data data da $f(x) := x^7 + 4x^3 + x + 6$. Dimostrare che f è iniettiva e surgettiva e calcolare $\lim f^{-1}(e^{-y})$ per $y \to +\infty$.

4. Sia a un numero positivo, e sia (x_n) la successione definita per ricorrenza come segue:

$$x_0 := 0 \quad \text{e} \quad x_{n+1} := x_n + a^n e^{-x_n} \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Dimostrare che (x_n) è crescente per ogni a. Dire quindi se il limite di (x_n) è finito o infinito nei seguenti casi: a) $a = 1$; b) $a > 1$; c) $a < 1$.

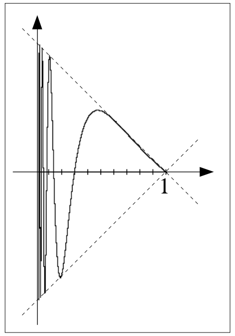
5. Sia L un numero finito, e sia (x_n) una successione di numeri reali. Poniamo

$$y_n := \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \quad \text{e} \quad z_n := \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{4n}}{3n} .$$

a) Dimostrare che $x_n \to L$ implica $y_n \to L$ e $z_n \to L$.
b) Far vedere che se y_n (o z_n) converge non è detto che x_n converga.
c) Dimostrare che $y_n \to L$ implica $z_n \to L$.
d) Far vedere che in generale se z_n converge non è detto che y_n converga.

I PARTE, GRUPPO A.

1. Deve essere $ae^0 = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{bx}-1}{x}$, ovvero $a = b$.
2. $(1-i)^{10} = \big(\sqrt{2}\, e^{-\pi i/4}\big)^{10} = 2^5 e^{-5\pi i/2} = 32\, e^{-\pi i/2} = -32\, i$.
3. a) e b) sono numerabili, c) è più che numerabile.
4. Si tratta dei punti z la cui distanza dal punto $z_0 = i - 1$ è compresa tra 1 e $\sqrt{2}$: in altre parole, è una corona circolare con centro di coordinate $(-1, 1)$ e raggi 1 e $\sqrt{2}$.
5. Si ha $\sqrt[n^2]{n!} \le \sqrt[n^2]{n^n} = (n^n)^{1/n^2} = n^{1/n} = e^{\log n/n}$ che tende a 1 perché $\log n/n$ tende a 0. D'altra parte $\sqrt[n^2]{n!} \ge 1$ e dunque il limite cercato è 1.
6. a) $f(x) := -x$. Per b) l'esempio è più complicato, e serve una funzione che oscilli vicino a 0 in modo da assumere sia l'estremo superiore che l'estremo inferiore dei valori quando x tende a 0. Ad esempio, $f(x) := (1-x)\sin(1/x)$ (figura accanto)



7. $(4n^2-1)/(4n^2) = 1 - 1/(4n^2)$ è una successione crescente che parte dal valore $3/4$ ed ha limite 1. Siccome l'esponenziale è una funzione crescente, $e^{3/4}$ è il minimo di A, mentre e è l'estremo superiore (ma non massimo).

I PARTE, GRUPPO B.

1. Deve essere $a \sin 0 = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{bx}-1}{x}$, ovvero a qualunque e $b = 0$.
2. $(i-1)^{10} = \big(\sqrt{2}\, e^{3\pi i/4}\big)^{10} = 2^5 e^{15\pi i/2} = 32\, e^{-\pi i/2} = -32\, i$.
3. a) e c) sono numerabili, b) è più che numerabile.
4. Si tratta dei punti z la cui distanza dal punto $z_0 = -i - 1$ è compresa tra 1 e $\sqrt{2}$: in altre parole, è una corona circolare con centro di coordinate $(-1, -1)$ e raggi 1 e $\sqrt{2}$.
5. Si ha $\sqrt[n^3]{n!} \le \sqrt[n^3]{n^n} = (n^n)^{1/n^3} = n^{1/n^2} = e^{\log n/n^2}$ che tende a 1 perché $\log n/n^2$ tende a 0. D'altra parte $\sqrt[n^3]{n!} \ge 1$ e dunque il limite cercato è 1.
6. a) $f(x) := -x$; b) $f(x) := x\sin(1/(1-x))$.
7. $(4n^2-1)/(4n^2) = 1 - 1/(4n^2)$ è una successione crescente che parte dal valore $3/4$ ed ha limite 1. Siccome il logaritmo è una funzione crescente, $\log(3/4)$ è il minimo di A, mentre 0 è l'estremo superiore (ma non massimo).

II PARTE, GRUPPO A.

1. a) X_1 è numerabile. Siccome X_1 è infinito, basta costruire una mappa ϕ da X_1 in $\mathbb{N}^5$ iniettiva, e ricordare che $\mathbb{N}^5$ è numerabile (in quanto prodotto finito di numerabili). Dato dunque $A \in X_1$, ordiniamo i suoi 5 elementi in senso crescente: $x_1 < x_2 < \cdots < x_5$, e poniamo quindi $\phi(A) := (x_1, \ldots, x_5)$.
   b) Generalizzando la dimostrazione di a) si vede che la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con k-elementi è numerabile per ogni k intero, e dunque X_2, che è unione di queste famiglie, è anch'essa numerabile (unione numerabile di numerabili è numerabile).
   c) X_3 è numerabile. Il punto è osservare che una successione (x_n) a valori interi converge a zero se e solo se esiste k tale che $x_n = 0$ per ogni $n \ge k$. Indicando dunque con Y_k l'insieme delle successioni (x_n) tali che $x_n = 0$ per $n \ge k$, abbiamo che X_3 è unione degli insiemi Y_k, e basta quindi dimostrare che ciascun Y_k è numerabile. Per far questo, basta considerare l'applicazione $\phi : Y_k \to \mathbb{Z}^k$ che associa ad ogni successione $(x_n) \in Y_k$ la successione troncata $(x_0, \ldots, x_{k-1})$: chiaramente ϕ è iniettiva (ed anche surgettiva, ma non ci serve), e siccome $\mathbb{Z}^k$ è numerabile, lo è pure Y_k.
   d) X_4 è più che numerabile. Per dimostrarlo costruiamo un'applicazione iniettiva da $2^{\mathbb{N}}$, che sappiamo essere più che numerabile, in X_4. Ad ogni successione (y_n) in $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ associamo la succesione (x_n) in X_4 così definita:
   $$x_n := \frac{y_n}{2^n} .$$
   Non è difficile vedere che l'applicazione $\phi : (y_n) \mapsto (x_n)$ è iniettiva. Volendo (ma non era richiesto) si può anche dimostrare che $X_4 \sim 2^{\mathbb{N}}$; infatti $X_4 \preceq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \preceq (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}}$.
2. a) Siccome $y \mapsto |y|$ è continua, $|f|$ è composizione di funzioni continue, e dunque è continua. Dall'dentità $y^- = \frac{1}{2}(|y| - y)$ otteniamo
   $$f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \tag{1}$$
   che dunque è una funzione continue (usiamo il fatto che $|f|$ è continua, che somma di funzioni continue è continua, etc.).
   b) Se $|f|$ è continua, non è detto che lo sia f: si prenda ad esempio la funzione f definita come segue: $f(x) := 1$ per $x \ge 0$ ed $f(x) := -1$ per $x < 0$.
   c) Se $|f|$ ed f^- sono continue, allora lo è anche f, infatti dalla (1) otteniamo
   $$f = |f| - 2f^- .$$
   d) Il punto chiave è osservare che $\min\{y_1, y_2\} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - |y_1 - y_2|)$, da cui si ottiene
   $$\min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \tag{2}$$
   che è dunque una funzione continua.
3. La funzione f è continua e strettamente crescente in quanto somma di funzioni che sono *notoriamente* continue e strettamente crescenti. Qundi f è iniettiva, e l'immagine di f è un intervallo perché il dominio di f è un intervallo (tutto $\mathbb{R}$). Siccome f tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, l'immagine di f deve essere tutto $\mathbb{R}$, e quindi f è surgettiva.
   A questo punto sappiamo che $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è ben definita e continua, e siccome $1/\log y \to 0$ per $y \to +\infty$, il limite di $f^{-1}(1/\log y)$ è $x = f^{-1}(0)$. Per trovare il valore di x non resta ora che risolvere l'equazione $x^5 + 3x^3 + 2x - 6 = 0$, e si vede facilmente (cercando tra le soluzioni razionali) che $x = 1$.
4. Il fatto che x_n è strettamente crescente segue immediatamente dal fatto che $a^n e^{-x_n}$ è sempre positivo. Pertanto la successione x_n ammette sicuramente limite L, finito o infinito.
   a) Dimostriamo ora che L deve essere infinito per $a = 1$. Infatti, supponendo per assurdo che L sia finito, passando al limite nell'identità $x_{n+1} = x_n + a^n e^{-x_n}$ otterremmo $L = L + e^{-L}$, e quindi $0 = e^{-L}$, che non si verifica mai.
   b) Similmente, passando a limite per $a > 1$ otteniamo $L = L + \infty = \infty$.

c) Per $a < 1$ il precedente ragionamento porta all'identità $L = L$, che non ci dice nulla di significativo. Siccome $x_n \geq x_0 = 1$ per ogni n, abbiamo tuttavia la maggiorazione

$$x_{n+1} = x_n + a^n e^{-x_n} \leq x_n + a^n$$

e ricordando che $x_1 = 1$, si deduce

$$x_{n+1} \leq 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \leq \frac{1}{1-a} \ ,$$

e dunque L deve essere finito.

5. a) Siccome $x_n \to L$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si ha

$$L - \varepsilon \leq x_n \leq L + \varepsilon \ . \tag{3}$$

In particolare, preso $n \geq n_\varepsilon$, tutti i valori $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$, soddisfano la (3). Quindi

$$n(L - \varepsilon) \leq x_{2n+1} + \cdots + x_{2n} \leq n(L + \varepsilon)$$

e dividendo per n

$$L - \varepsilon \leq y_n \leq L + \varepsilon \ ,$$

e dunque $y_n \to L$. Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che dato una insieme di numeri reali tutti maggiori di a (risp. minori di b), anche la media artimetica risulta maggiore di a (risp. minore di b). La dimostrazione del fatto che $z_n \to L$ è identica.
b) Prendendo ad esempio $x_n := (-1)^n$ – che non converge! – si ha

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ 1/n & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} \quad \text{e} \quad z_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ 1/(3n) & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

ed entrambe convergono a 0.
c) Il punto chiave è scrivere z_n in termini di y_n:

$$z_n = \frac{1}{3n} \sum_{k=n+1}^{4n} x_k = \frac{1}{3n} \sum_{n+1}^{2n} x_k + \frac{1}{3n} \sum_{2n+1}^{4n} x_k = \frac{1}{3} \Big(\frac{1}{n} \sum_{n+1}^{2n} x_k \Big) + \frac{2}{3} \Big(\frac{1}{n} \sum_{2n+1}^{4n} x_k \Big)$$

ovvero

$$z_n = \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} y_{2n} \ . \tag{4}$$

Da questa identità (e dalle proprietà dei limiti) segue immediatamente che se y_n converge ad L allora z_n converge a $\frac{1}{3}L + \frac{2}{3}L = L$.
d) Difficile. Prima di tutto facciamo vedere che (y_n) può essere una qualunque successione. In altre parole, facciamo vedere che assegnati arbitrariamente i valori di y_n possiamo trovare degli x_n che risolvono il sistema di (infinite) equazioni lineari

$$\begin{cases} y_1 = x_2 \\ y_2 = (x_3 + x_4)/2 \\ y_3 = (x_4 + x_5 + x_6)/3 \\ y_4 = (x_5 + x_6 + x_7 + x_8)/4 \\ \quad \vdots \\ y_n = (x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n})/n \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Per dimostrare che il sistema è risolubile, si procede per induzione. La prima equazione è chiaramente risolubile, è determina x_2. Supponondo poi di aver già risolto le prime n equazioni, trovando $x_2, \ldots x_{2n}$, si vede subito che possiamo risolvere anche la $(n+1)$-esima equazione, perché abbiamo ben due variabili libere (x_{2n+1} e x_{2n+2}).
Per concludere la dimostrazione, facciamo vedere che presa una successione convergente (z_n) a piacere. possiamo costruire (y_n) non convergente in modo tale che valga la (4) per ogni $n \geq 1$, vale a dire

$$y_{2n} = \frac{3}{2} z_n - \frac{1}{2} y_n \ . \tag{5}$$

Infatti possiamo prendere y_d in modo arbitrario per ogni d dispari, e poi utilizzare la (5) per definire $y_{2^k d}$ per ogni k intero (per ricorrenza), ottenendo quindi una successione (y_n) che soddisfa la (5) e quindi anche la (4). Inoltre, avendo posto $y_d := 1$ quando $d \equiv 1 \pmod 4$, e $y_d := -1$ quando $d \equiv -1 \pmod 4$, abbiamo la certezza che y_n non converge.

II Parte, gruppo B.

1. Si procede come per il gruppo A. Nel punto d), l'applicazione iniettiva $\phi : 2^{\mathbb{N}} \to X_4$ è quella che ad ogni successione (y_n) in $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ associa la succesione (x_n) in X_4 data dalla formula $x_n := y_n/(2n)$.
2. Si procede come per il gruppo A, con opportune modifiche: per a) si usa l'identità $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$; per c) si usa l'identità $f = 2f^+ - |f|$; per d) si usa $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$.
3. Come per il gruppo A: il limite è dato dalla soluzione dell'equazione $x^7 + 4x^3 + x + 6 = 0$ (che sappiamo già esssere unica), ovvero $x = -1$.
4. Uguale al gruppo A.
5. Uguale al gruppo A.

Commenti.

- Esercizio 1a), seconda parte: in molti hanno scritto che X_1 è uguale a $\mathbb{N}^5$ (ovvero $\mathbb{N}^6$ per il gruppo B). Questo è un errore: i sottoinsiemi di di $\mathbb{N}$ con 5 elementi non sono ordinati mentre per i vettori in $\mathbb{N}^5$ l'ordine delle coordinate conta – in altre parole, $\{1,3,4,8,9\} = \{3,1,8,9,4\}$, mentre $(1,3,4,8,9) \neq (3,1,8,9,4)$. Inoltre gli elementi di un insieme in X_1 sono (per definizione) cinque e tutti distinti, mentre le coordinate di un vettore in $\mathbb{N}^5$ possono essere tutte uguali – in altre parole, $(1,1,1,2,1) \in \mathbb{N}^5$, ma l'insieme delle sue coordinate è $\{1,2\}$ che non appartiene a X_1.
- Esercizio 1b), seconda parte: tra le soluzioni proposte, una molto elegante è questa: ad ogni $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$ sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$ associamo il numero intero $x_A = 2^{i_1} + \ldots + 2^{i_k}$, ovvero il numero intero la cui i-esima cifra in base 2 è 1 se $i \in A$ ed è 0 altrimenti (poniamo anche $x_A = 0$ quando A è vuoto). La mappa $A \mapsto x_A$ da X_2 in $\mathbb{N}$ è bigettiva!
- Esercizio 2a), seconda parte: molti hanno cercato di dimostrare la continuità di $|f|$ distinguendo i punti x in tre classi a seconda che sia $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ oppure $f(x) = 0$, in modo da poter dire esplicitamente quanto vale $|f|$; così facendo, però, la dimostrazione può diventare molto complicata per i punti della terza classe che non siano punti isolati (e ce ne sono!).
- Esercizio 2d), seconda parte: come per il punto a), molti hanno cercato di dimostrare la continuità di $\min\{f, g\}$ ($\max\{f, g\}$ per il gruppo B) distinguendo i punti x in tre classi a

seconda che sia $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$ oppure $f(x) = g(x)$, andando incontro alle stesse disfficoltà indicate nel punto precedente. In realtà è possibile dimostrare la continuità di $\min\{f, g\}$ anche senza usare l'identità (2): dato $x_0 \in \mathbb{R}$, essendo f e g continue in x_0, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\delta', \delta'' > 0$ tali che

$$|x - x_0| \leq \delta' \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon \ ,$$
$$|x - x_0| \leq \delta'' \Rightarrow g(x_0) - \varepsilon \leq g(x) \leq g(x_0) + \varepsilon \ .$$

Ma allora, posto $\delta := \min\{\delta', \delta''\}$, $|x - x_0| \leq \delta$ implica

$$\max\{f(x_0), g(x_0)\} - \varepsilon \leq \max\{f(x), g(x)\} \leq \max\{f(x_0), g(x_0)\} + \varepsilon \ .$$

- Esercizio 3, seconda parte: l'unica difficoltà di questo esercizio consiste nel dare delle dimostrazioni *complete* degli enunciati. Quindi, per far vedere che f è surgettiva, non basta dire che f ha limite $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, ma bisogna anche sottolineare il ruolo della continuità e del fatto che f è definita su un intervallo (intervallo in senso lato, in questo caso tutta la retta). Analogamente, anche la continutà dell'inversa di f segue dal fatto che il dominio è un intervallo.

- Esercizio 4, seconda parte: in molti hanno cercato di dimostrare la monotonia della successione per induzione, mentre in realtà l'induzione non serve, e basta osservare che $x_{n+1} - x_n = a^n e^{-x_n}$, che è sempre un numero positivo. Per dimostrare c) alcuni hanno osservato che $|x_{n+1} - x_n| \leq a^n$, e siccome per n sufficientemente grande a^n è più piccolo di un qualunque ε positivo assegnato, ne hanno dedotto che la successione è di Cauchy (e dunque convergerebbe). Purtroppo la definizione di successione di Cauchy richiede un controllo su tutte le differenze $|x_m - x_n|$, che è più complicato da dimostrare.

- Esercizio 5a), seconda parte: alcuni hanno inspiegabilmente sostenuto che (y_n) e (z_n) sono sottosuccessioni di x_n. Altri hanno usato la seguente dimostrazione: siccome $x_n \to L$, anche $x_{n+k} \to L$ per ogni k e dunque, siccome il limite della somma è la somma dei limiti,

$$y_n = \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \to \frac{nL}{n} = L \ .$$

  Questo è un errore grave, perché la regola sui limite delle somme si applica solo a successioni che si scrivono come somma di un numero *finito e costante* di successioni, mentre in questo caso il numero degli addendi è n, che non è costante.

- Esercizio 5c), seconda parte: molti hanno utilizzato la formula $z_n = (y_n + y_{2n} + y_{3n})/3$, che però è sbagliata. L'errore nasce dall'aver scritto y_{2n} come media dei valori $x_{2n+1}, \ldots, x_{3n}$ invece che di $x_{2n+1}, \ldots, x_{4n}$. Per inciso, una volta ottenuta la formula corretta, si può applicare il fatto che il limite della somma è la somma dei limiti, invece di ridimostrarlo come hanno fatto alcuni!

- Esercizio 5d), seconda parte: una soluzione molto semplice ed elegante abbozzata in uno degli scritti consiste nel costruire x_n per ricorrenza come segue: per n è multiplo di 4 si prende

$$x_n := -\sum_{k=n/4+1}^{n-1} x_k \ , \tag{6}$$

  per n è multiplo di 2 ma non di 4

$$x_n := n - \sum_{k=n/2+1}^{n-1} x_k \ , \tag{7}$$

  infine, per n dispari si prende x_n come si vuole. Ora è facile vedere che la (6) implica $z_n = 0$ per ogni n, mentre la (7) implica $y_n = 1$ per ogni n dispari. Dunque z_n converge a 0, ma se per assurdo convergesse anche y_n, dovrebbe convergere a 1, e questo contraddirrebbe quanto dimostrato al punto c).