I Parte.

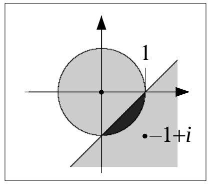
1. Dei seguenti insiemi, dire se sono finiti, numerabili o più che numerabili:
   a) polinomi a coefficienti interi;
   b) soluzioni dell'equazione differenziale $y' + y = 0$ definite su $\mathbb{R}$;
   c) soluzioni dell'equazione $\sin(x^2) = 0$.
2. Dare un'esempio di funzione continua e derivabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la cui derivata non si annulla nel punto di massimo.
3. Per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a \sin\Big(\frac{1}{x+x^2}\Big) dx$ è finito?
4. Calcolare il valore di $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n e^{-n}$.
5. Calcolare la derivata di $f(x) := \displaystyle\int_0^{2x} te^{t+1}\, dt$.
6. Calcolare i raggi di convergenza delle serie di potenze $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{x^n}{1+n^2}$ e $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{x^{2n}}{2^n}$.
7. Dare un'esempio di funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ma non C^2.
8. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $1 \geq |z| \geq |z - 1 + i|$.

II Parte.

1. a) Dato $a \in \mathbb{R}$, determinare la parte principale in 0 di
$$f_a(x) := x^a \sin(x^3 + x^4)\, \sin(e^{-x})\ .$$
   b) Dire per quali a l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^\infty f_a(x)\, dx$ risulta finito.
2. Sia data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con limite $+\infty$ a $\pm\infty$. Dimostrare che f ammette un punto di minimo su $\mathbb{R}$. Com'è fatta l'immagine di f?
3. a) Calcolare il raggio di convergenza R della serie
$$f(x) := \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\ . \tag{1}$$
   b) Determinare il comportamento della serie (1) per *ogni* punto $x \in \mathbb{R}$.
   c) Determinare esplicitamente f', e quindi f, per $x \in (-R, R)$.
   d) Provare a calcolare $f(\pm R)$. Qual'è la difficoltà?
4. Sia X l'insieme delle successioni di numeri reali (x_n) con $n = 0, 1, 2, \dots$ che soddisfano la seguente condizione:
$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{per ogni } n = 0, 1, 2, \dots. \tag{2}$$
   a) Dimostrare che X è uno spazio vettoriale.
   b) Dimostrare che dati $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ esiste una ed una sola successione $(x_n) \in X$ tale che $x_0 = a_0$ ed $x_1 = a_1$. Qual'è la dimensione di X?
   c) Trovare tutte le successioni $(x_n) \in X$ della forma $x_n = \lambda^n$ con $\lambda \neq 0$ numero reale.
   d) Dare una formula esplicita per la successione $(x_n) \in X$ tale che $x_0 = x_1 = 1$.

I Parte.

1. a) numerabile, b) più che numerabile, c) numerabile.
2. Ad esempio $f(x) := x$.
3. Per $x \to +\infty$ si ha $x^a \sin\big(1/(x+x^2)\big) \sim x^a/(x+x^2) \sim x^{a-2}$, e dunque l'integrale risulta finito se e solo se $a < 1$.
4. $\displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n e^{-n} = \sum_0^\infty (-1/e)^n = \frac{1}{1-(-1/e)} = \frac{e}{e+1}$.
5. $f'(x) = 4x\, e^{2x+1}$.
6. $R_1 = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1+n^2}} \right)^{-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+n^2} = 1;$
   $R_2 = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} \right)^{-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{2^n} = \sqrt{2}.$
7. Ad esempio $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{per } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{per } x < 0. \end{cases}$
8. Le soluzioni della disequazione $1 \geq |z|$ sono i punti (del piano complesso) con distanza da 0 inferiore a 1, ovvero il cerchio di centro l'origine e raggio 1, mentre le soluzioni di $|z| \geq |z-1+i|$ sono i punti più vicini a $1-i$ che a 0, ovvero il semipiano sotto la retta $y = x - 1$. Le soluzioni sono l'intersezione di queste due regioni, ovvero la zona in grigio scuro nella figura accanto.



II Parte.

1. a) Per x che tende a 0 si ha $\sin(x^3+x^4) \sim x^3 + x^4 \sim x^3$, mentre $\sin(e^{-x}$ converge a $\sin(1)$, che è un numero diverso da 0. Quindi
$$f_a(x) \sim \sin(1)\, x^{a+3}\ . \tag{3}$$
b) Siccome f_a è continua in $(0,+\infty)$ ma per certi a può avere un asintoto in 0, l'integrale si spezza in due integrali impropri elementari: quello da 0 a 1, e quello da 1 a $+\infty$. Per via della (3) e del teorema del confronto asintotico, f_a è (assolutamente) integrabile su $(0,1)$ se e solo se $a+3 > -1$, ovvero $a > -4$. Si osservi che la (3) implica anche che f_a è positiva in un intorno di 0, e quindi si può applicare il teorema del confronto asintotico nei due sensi. Per il secondo integrale improprio usiamo la stima
$$|f_a(x)| \leq x^a \sin(e^{-x}) \leq x^a e^{-x}$$
(valida per $e^{-x} \leq \pi/2$, e quindi anche per $x \geq 0$), e siccome $x^a e^{-x}$ è "o" piccolo di qualunque potenza di x per qualunque a, per il teorema del confronto asintotico $x^a e^{-x}$ – e quindi anche f_a – sono assolutamente integrabile su $(1,+\infty)$ per ogni a.
Concludendo, l'integrale improprio di f_a su $(0,+\infty)$ è finito se e solo se $a > -4$.
2. Si prenda $M > \inf f$. Siccome f ha limite $+\infty$ a $\pm\infty$, devono esistere x_1 ed x_2 finiti tale che $f(x) \geq M$ per $x \leq x_1$ e per $x \geq x_2$. Ora, f deve certamente avere un punto di minimo x_m sull'intervallo chiuso $I := [x_1, x_2]$, ed è facile verificare che questo è anche un punto di minimo su $\mathbb{R}$. Infatti, per la scelta di M, f deve assumere anche valori inferiori ad M, e può farlo solo nell'intervallo I (tra l'altro, questo implica che I non è vuoto, ovvero che $x_1 \leq x_2$), per cui il valore minimo di f su I è certamente inferiore ad M, e quindi anche ad ogni valore assunto da f fuori da I.
3. a) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}} \right)^{-1} = \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{m} = 1.$
b) dal punto a) sappiamo già che la serie (1) converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$. Restano i casi $x = \pm 1$. In entrambi i casi la serie converge per il criterio di Leibniz per le serie a segno alterno.
c) Dalla teoria delle serie di potenze sappiamo che per ogni $x \in (-1,1)$ si ha
$$f'(x) = \sum_0^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_0^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}\ .$$
Trovando la primitiva che vale 0 in 0 (perché $f(0) = 0$) otteniamo infine
$$f(x) = \arctan x \quad \text{per } x \in (-1,1). \tag{4}$$
d) Dalla (4) uno vorrebbe dedurre che $f(\pm 1) = \arctan(\pm 1) = \pm\pi/2$. La difficoltà è che la teoria delle serie di potenze garantisce la validità della (4) solo all'interno dell'intervallo di convergenza $(-1,1)$. Per poter estendere questa identità agli estremi $x = \pm 1$, basterebbe dimostrare che $f(x)$ è continua a sinistra in 1 e a destra in -1, ma questo non è facile. Un modo per farlo, è osservare che le funzioni f_m date dalle somme parziali della serie (1), sono tutte Lipschitziane con costante di Lipschitz minore o uguale a 2, e dunque lo stesso deve valere per il limite f. Infatti, posto
$$f_m(x) := \sum_0^m \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\ ,$$
abbiamo
$$f'_m(x) = \sum_0^m (-1)^n x^{2n} = \frac{1-(-x^2)^{m+1}}{1+x^2}\ .$$
Dunque
$$|f'_m(x)| \leq \frac{1+(x^2)^{m+1}}{1+x^2} \leq 2$$
da cui si deduce che per ogni $x, y \in [-1,1]$ con $x \neq y$ vale
$$|f_m(x) - f_m(y)| \leq 2|x-y|\ ,$$
e questa condizione passa al limite per $m \to +\infty$, dimostrando che f ha costante di Lipschitz minore o uguale a 2, ed in particolare è continua.
4. a) Si tratta di verificare che X è un sottospazio dello spazio vettoriale delle syuccessioni, ovvero che è chiiuso per somma e moltiplicazione per costante.
b) Chiaramente, posto $x_0 := a_0$ e $x_1 := a_1$, x_2 risulta univocamente determinato dalla condizione $x_2 = x_1 + x_0$; a sua volta, x_3 risulta univocamente determinato dalla condizione $x_3 = x_2 + x_1$, e così via. La versione formalizzata di quest'argomentazione è la seguente. Unicità: date (x_n) ed (x'_n) in X tali che $x_0 = x'_0$ e $x_1 = x'_1$, si dimostra per induzione che
$$x_n = x'_n \tag{6}$$

per ogni n; infatti, suppondendo che la (6) sia vero per tutti gli indici minori o uguali ad n, con $n \geq 1$, si ottiene dalla (2) che deve essere vero pure per $n+1$. Esistenza: solita costruzione per induzione.

Per concludere, oserviamo che l'applicazione lineare da X in $\mathbb{R}^2$ che associa ad ogni successione (x_n) il vettore (x_0, x_1) è, per quanto visto, iniettiva e surgettiva, e dunque X ha dimensione 2.

c) Imponendo $x_n = \lambda^n$, la condizione (2) diventa $\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n$ per ogni n, che dividendo λ^n dà luogo all'equazione $\lambda^2 = \lambda + 1$, risolta da

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \ . \tag{5}$$

d) X è uno spazio vettoriale di dimensione 2, e le successioni (λ_1^n) e (λ_2^n) trovate in c) sono linearmente indipendenti – perché lo sono i vettori $(1, \lambda_1)$ e $(1, \lambda_2)$ – e quindi sono una base di X. Pertanto ogni successione (x_n) in X è combinazione lineare di queste due, ovvero devono esistere α_1 e α_2 tali che $x_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$ per ogni n. Per trovare questi due parametri, basta limitarsi a imporre l'identit'a per $n = 0, 1$. Nel nostro caso otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 1 = x_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \ , \\ 1 = x_1 = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 \ . \end{cases}$$

Risolvendolo con $\lambda_{1,2}$ dati in (5) otteniamo

$$\alpha_{1,2} := \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$$

e dunque la successione cercatat è

$$x_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \ .$$

Commenti.

- Esercizio 4, prima parte. Quasi nessuno si è accorto che si tratta di una serie geometrica, una delle poche che può essere calcolata esplicitamente.
- Esercizio 6, prima parte. Ad essere precisi, la seconda serie di potenze andrebbe riscritta come $\sum a_m x^m$ con $a_m = 0$ per m dispari e $a_m = 1/2^{m/2}$ per m pari. Pertanto il raggio di convergenza è dato da

$$R_2 = \Big(\limsup_{m \to +\infty} \sqrt[m]{|a_m|} \Big)^{-1}$$

  ma trascurando gli m dispari, che non influiscono sul limsup, e facendo il cambio di variabile $m = 2n$, ritorniamo al conto fatto in precedenza.
- Esercizio 8, prima parte: solo una persona l'ha risolto correttamente!!
- Esercizio 3a), seconda parte. Per il calcolo del raggio di convergenza della serie (1) vale lo stesso discorso fatto per la seconda serie dell'esercizio 6 della prima parte: ad essere precisi la serie andrebbe riscritta come $\sum a_m x^m$ con $a_m = 0$ per m pari e $a_m = (-1)^{(n-1)/2}/m$ per m dispari, e il raggio di convergenza sarebbe dato da

$$R = \Big(\limsup_{m \to +\infty} \sqrt[m]{|a_m|} \Big)^{-1}$$

  ma di nuovo ci si riconduce al conto fatto in precedenza. Notare che applicare il criterio del rapporto per trovare R, cvome molti hanno fatto, non è del tutto corretto, perché $|a_m|/|a_{m+1}|$ non è definito per m pari, ed è 0 per m dispari. La versione corretta del criterio del rapporto in questo caso sarebbe questa:

$$R = \sqrt{\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{2n-1}|}{|a_{2n+1}|}} = \sqrt{\lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{2n-1}} = \sqrt{1} = 1 \ .$$

  (Notare la presenza della radice quadrata, dovuta al fatto che si sta considerando il rapporto non di due coefficienti consecutivi, ma intervallati di 2.)
- Esercizio 3c), seconda parte. Quasi nessuno si è accorto che la serie di potenze derivata è una serie geometrica, e pertanto può essere calcolata esplicitamente.
- Esercizio 4d), seconda parte. La successione in questione è quella di Fibonacci, di cui abbiamo dato così una formula esplicita.