Matematica e Statistica, Anno Accademico 2008-2009,
Scienze Ecologiche e della Biodiversità
RUDIMENTI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI: V.M. Tortorelli
27 novembre 2008

Equazioni di base

"Quadratura" semplice Se $f: A \to \mathbf{R}$ è continua su A segmento in $\mathbf{R}$, per il teorema fondamentale del calcolo la $t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s)ds$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(t), & t \in A \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Variabili separabili Se $f: A \to \mathbf{R}$, $g: B \to \mathbf{R}$ sono funzioni continue su A e su B, segmenti in $\mathbf{R}$, si tratta di trovare le $y \in C^1(I)$, I segmento incluso in A, per cui $\boxed{y'(t) = f(t)g(y(t)),\ t \in I}$

- Se per $\overline{y} \in B$ si ha $g(\overline{y}) = 0$ allora la funzione costante $y(t) = \overline{y}$, $t \in A$ è soluzione.

Procedimento euristico
i- si cercano le soluzioni che non si annullano: dall'equazione deve essere $\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$
ii- si considera Γ primitiva di $\frac{1}{g}$ su $J \subset B$
iii- si considera F primitiva di f
iv- si scelgono $I \subset A$ e $c \in \mathbf{R}$ in modo che $c + F(I) \subset \Gamma(J)$
l'eventuale soluzione deve verificare l'equazione $\Gamma(y(t)) = F(t) + c$, $t \in I$

Il procedimento inverso Considerando quindi
i- un generico $]\alpha, \beta[= J \subset B$ in modo che g si annulli solo agli estremi di$J$,
ii-una generica Γ primitiva di $\frac{1}{g}$ su J (essendo g continua non cambia segno e Γ sarà invertibile su J)
iii-una generica primitiva F di f su A
iv- e determinando di conseguenza I e c t.c. $c + F(I) \subseteq \Gamma(J)$, l'intervallo di estremi $\Gamma(\alpha)$ e $\Gamma(\beta)$, si trova che

$$\boxed{y(t) = \Gamma^{-1}(F(t) + c),\ t \in I}$$

è una soluzione e inoltre $\alpha < y(t) < \beta$, $t \in I$.

Problema di Cauchy 1: Quindi se $g(y_0) \neq 0$ per determinare una soluzione locale al problema di Cauchy

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) = f(t)g(y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}}$$

- si prende J in modo che $y_0 \in J$ e g non si annulli se non agli estremi di J, $\Gamma(p) = \displaystyle\int_{y_0}^p \frac{du}{g(u)}$, $p \in J$

- $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t f(s)ds$, I per cui $t_0 \in I$ e $F(I) \subset \Gamma(J)$

La funzione $y(t) = \Gamma^{-1}(F(t) + c)$ è ben definita ed è soluzione, e tale y è a *valori in* J: $\alpha < y(t) < \beta$, per $t \in I$. Si ha l'esistenza locale per tale problema e il fatto che la soluzione è *unica finchè non annulla* g.

(*Problema di Cauchy 2:* Se $\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{\beta-\varepsilon}^\beta \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$ si ottiene che la soluzione trovata è globale e non può annullare g se non agli estremi di A: infatti se fosse $g(y(t_1)) = 0$ si avrebbe $y(t_1)$ eguale ad α o a β da cui $\int_{t_0}^t f(s)ds = \int_{y_0}^{y(t_1)} \frac{du}{g(u)} = \pm\infty$. Ma f ha integrale finito sugli intervalli limitati e chiusi contenuti in A essendo continua.

Problema di Cauchy 3: Analogamente se y_0 è uno *zero isolato* di g e $\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0} \frac{dp}{|g(p)|} = \int_{y_0}^{y_0+\varepsilon} \frac{dp}{|g(p)|} = +\infty$ si ha che la funzione costantemente eguale a y_0 è *l'unica soluzione* del problema di Cauchy.)

Equazioni lineari del primo ordine $y'(t) - a(t)y(t) = f(t)$ con f e a funzioni continue su un intervallo I.
Omogenea $u'(t) = a(t)u(t)$: se $\alpha' = a$ lo *spazio vettoriale delle soluzioni* è dato da $u(t) = ce^{\alpha(t)}$.
Soluzioni Moltiplicando per $e^{-\alpha(t)}$ ci si riduce alla ricerca di primitive di $e^{-\alpha(t)}y(t)$ e le soluzioni sono date

$$\boxed{y(t) = ce^{\alpha(t)} + \int^t e^{\alpha(t)-\alpha(s)} f(s)ds = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_t^s a(x)dx} f(s)ds}$$

si noti che tutte le soluzioni dell'equazione completa si ottengono da una particolare soluzione (il secondo addendo) sommando una soluzione dell'omogenea.

Equazioni del secondo ordine

Teorema 1 Si consideri l'equazione lineare nell'incognita $y(t)$: $a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$, con coefficienti e termine noto funzioni continue su un intervallo I con $a(t) \neq 0$ e valori in $\mathbf{R}$ [risp. $\mathbf{C}$].
1- L'insieme delle soluzioni dell'equazione con termine noto nullo (equazionee omogenea associata) è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ [risp. su $\mathbf{C}$]di dimensione 2 ovvero trovate due soluzoni dell'omogenea linearmente indipendenti $u_1(t)$ e $u_2(t)$ ogni altra soluzione è del tipo $c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ con c_1, c_2 costanti reali [risp. complesse].
2- Vi è almeno una soluzione dell'equazione $u^*(t)$.
3- Tutte le altre soluzioni dell'equazione sono del tipo $u^*(t) + c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$.

Approccio generale per risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$

1- si determina una base delle soluzioni dell'omogena $(u_1(t), u_2(t))$
2- si trova una soluzione particolare $u^*(t)$
3- si cercano c_1, c_2 per cui $c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + u^*(t)$ verifichi le condizioni iniziali del problema.

Passo 1 nel caso di coefficienti costanti
Il caso elementare per trovare soluzioni è quello in cui i coeffcienti sono funzioni costanti.
Teorema 2. Si consideri l'equazione lineare omogenea nell'incognita $u(t)$: $au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0$, con coefficienti costanti reali. Si ha che tutte e sole le soluzioni sono:

$$u(t) = \begin{cases} c_1e^{t\alpha}\cos\beta t + c_2e^{t\alpha}\sin\beta t & b^2 - 4ac < 0 \\ c_1e^{t\alpha} + c_2te^{t\alpha} & b^2 - 4ac = 0 \\ c_1e^{t\alpha_1} + c_2e^{t\alpha_2} & b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$, con $\alpha \pm i\beta$, ovvero α_1, α_2, α radici di $ax^2 + bx + c = 0$.
Volendo enunciare nel caso complesso il teorema si ha che tutte e sole le soluzioni (questa volta a valori in $\mathbf{C}$) al variare di c_1 e c_2 in $\mathbf{R}$, con $\alpha \pm i\beta$, ovvero α_1, α_2, α radici di $ax^2 + bx + c = 0$. sono del tipo:

$$u(t) = \begin{cases} \gamma_1e^{\alpha_1t} + \gamma_2e^{\alpha_2t} & b^2 - 4ac \neq 0 \\ \gamma_1e^{\alpha t} + \gamma_2te^{\alpha t} & b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$$

al variare di γ_1 e γ_2 in $\mathbf{C}$, con α_1, α_2, α radici complesse di $ax^2 + bx + c = 0$.
Quindi se a , b, c sono reali si riottiene l'enunciato precedente osservando che per definizione di forma esponenziale di un numero complesso:

$$e^{it} + e^{-it} = 2\cos t,\ ie^{-it} - ie^{it} = 2\sin t$$

Passo 2: principali metodi per la determinazione di una soluzione particolare
Per tentativi
Coefficienti indeterminati per equazioni a coefficienti costanti
Se il termine noto è $e^{\alpha t}(p_1(t)\cos\beta t + p_2(t)\sin\beta t)$, con p_1 e p_2 polinomi reali, si cerca una soluzione soluzioni del tipo:

$$u^*(t) = t^m e^{t\alpha}(q_1(t)\cos\beta t + q_2(t)\sin\beta t)$$

ove q_1 e q_2 sono polinomi con gradi minori del massimo di quelli di p_1 e p_2, ed m molteplicità di $\alpha \pm i\beta$, come radici del polinomio associato all'equazione.
Tale metodo è piè semplice da enunciarsi, e da usare, nel caso complesso:
se il termine noto è $p(t)e^{\lambda t}$, con p polinomio, si cerca una soluzione soluzioni del tipo:

$$u^*(t) = t^m\tilde{q}(t)e^{\lambda t}$$

ove $\tilde{q}$ è un polinomio con grado minore eguale a quello di $p(t)$, ed m è la molteplicità di λ come radice del polinomio associato all'equazione: $az^2 + bz + c$.
Variazione delle costanti Se $u_1(t)$, $u_2(t)$ danno una base dello spazio delle soluzioni dell'omogenea, si cercheranno soluzioni del tipo $u^*(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t)$

- ci si riduce al sistema numerico (t è fisso) $\begin{cases} u_1c_1' + u_2c_2' = 0 \\ u_1'c_1' + u_2'c_2' = \frac{f}{a} \end{cases}$ e quindi si trovano le primitive di c_1', c_2'.