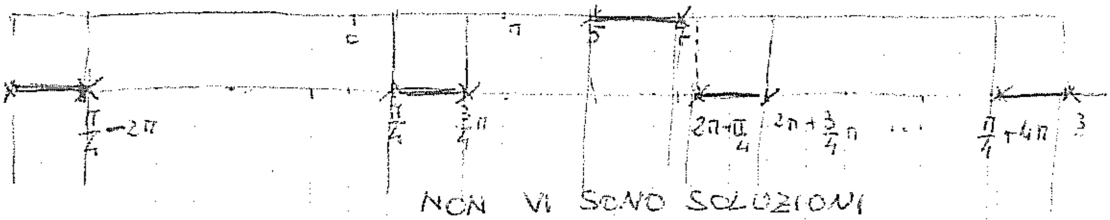
Matematica e Statistica per Scienze Ecologiche e d. B.

A A 2008-2009 XIII Appello 14 Settembre 2010

1) $\begin{cases} \sin x > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 5 < x < 7 \end{cases}$  $\begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 5 < x < 7 \end{cases}$

$5 > \frac{3}{4}\pi$ infatti $20 > 12 > 3\pi$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi > 7$ infatti $9\pi > 9 \cdot 3{,}14 = 28{,}26 > 28$

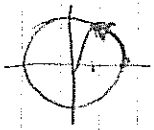


NON VI SONO SOLUZIONI

2) $1 - i$: $|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ $\quad 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\varphi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$

 $\varphi = \frac{7}{4}\pi \quad 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i \sin\frac{7}{4}\pi\right)$

$2\sqrt{3} + 6i$; $|2\sqrt{3} + 6i| = \sqrt{2^2 \cdot 3 + 6^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ $\begin{cases} \frac{1}{2} = \cos\varphi \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\varphi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$

$2\sqrt{3} + 6i = 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) =$  $\varphi = \frac{\pi}{3}$

$= 4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$

$e^{1 - i\frac{\pi}{4}} = e\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = e\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = e\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

3) Area triangolo di vertici $(1,1,1), (-10,-9,-11), (9,10,11) =$

" " " $(0,0,0), (-11,-10,-12), (8,9,10) =$

$= \frac{1}{2}$ Area parallelogramma " " " " $, (8-11, 9-10, 10-12) =$

$= \frac{1}{2} \left| (-11,-10,-12) \times (8,9,10) \right| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\det\begin{pmatrix} -11 & -10 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det\begin{pmatrix} -11 & -12 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}\right)^2 + \left(\det\begin{pmatrix} -10 & -12 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}\right)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{621} \sim \frac{1}{2}\, 24{,}9199 \sim 12{,}46$

4) $3, 5, 9, 10, 12, -2, 67, -10$ dimensione campione 8

$\frac{\cancel{3} + 5 + \cancel{9} + \cancel{10} + \cancel{12} - 2 + 67 - \cancel{10}}{8} = \frac{94}{8} = \frac{47}{4} = 11{,}75$ MEDIA

$\frac{9 + 25 + 81 + 100 + 144 + 4 + 4489 + 100}{8} - (11{,}75)^2 = 619 - 138{,}0625 =$

$= 480{,}9375$ VARIANZA

$-10, -2 \,|\, 3, 5 \,|\, 9, 10 \,|\, 12, 67$ campione ordinato pari multiplo di 4

I° quartile $\{-2, 3\}$ $\frac{1}{2}$ MEDIANA $\{5, 9\}$ 7 III $\{10, 12\}$ 11

5) a) $X_i = \begin{cases} 1 & \text{se il soggetto } i \text{ è mutante} \quad 1 \le i \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

X_1, X_2 siano per ipotesi indipendenti (scelte casuale di indistinguibili)

$P(X_i = 1) = p \qquad P(X_i = 0) = 1 - p$

$P(X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 0) = P(X_1 = 1)\, P(X_2 = 0) = p(1-p)$

P(solo un soggetto tra i due è mutante) =

$= P([(X_1 = 1) \text{ e } (X_2 = 0)] \text{ o } [(X_1 = 0) \text{ e } (X_2 = 1)])$ = eventi incompatibili

$= P(X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 0) + P(X_1 = 0 \text{ e } X_2 = 1) = 2p(1-p)$

b) $X_1, \dots, X_{100}$ indipendenti con la distribuzione detta (Bernoulli di parametro p)

P(esattamente 40 su 100 mutanti) = [Binomiale]

$= \binom{100}{40} p^{40} (1-p)^{60} =$

c) $Y_i = \begin{cases} 1 & \text{il soggetto } i \text{ è mutante} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad 1 \le i \le 2$

Y_1 e Y_2 non sono indipendenti (estrazioni senza reimmissione)

$P((Y_1 = 1 \text{ e } Y_2 = 0) \text{ o } (Y_1 = 0 \text{ e } Y_2 = 1))$ = [ipergeometrica]

$= \dfrac{\binom{40}{1}\binom{60}{1}}{\binom{100}{2}} = \dfrac{40 \cdot 60}{\frac{100 \cdot 99}{2}} = \dfrac{48}{99} \sim 0{,}4848485$

altrimenti direttamente:

$P((Y_1 = 1 \text{ e } Y_2 = 0) \text{ o } (Y_1 = 0 \text{ e } Y_2 = 1)) =$

$= P(Y_1 = 1 \text{ e } Y_2 = 0) + P(Y_1 = 0 \text{ e } Y_2 = 1) =$

$= P(Y_2 = 0 / Y_1 = 1)\, P(Y_1 = 1) + P(Y_2 = 1 / Y_1 = 0)\, P(Y_1 = 0) =$

$= \dfrac{60}{99} \dfrac{40}{100} + \dfrac{40}{99} \dfrac{60}{100} = \dfrac{48}{99}$

d) Scegliere a caso 2 soggetti su 100 scelti a caso è come scegliere direttamente i 2 a caso
Quindi le variabili aleatorie che indicano le due scelte

$X_i = \begin{cases} 1 & i \text{ è mutante} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad 1 \le i \le 2$ sono indipendenti $P(Z_i = 1) = p$

Si tratta di calcolare

$$P(\underbrace{\text{esattamente 40 su 100 son mutanti}}_{A} / \underbrace{(X_1=0 \text{ e } X_2=1) \circ (X_1=1 \text{ e } X_2=0)}_{B})$$

$$P(A/B) = P(B/A)\frac{P(A)}{P(B)} = [\text{punto c}] =$$

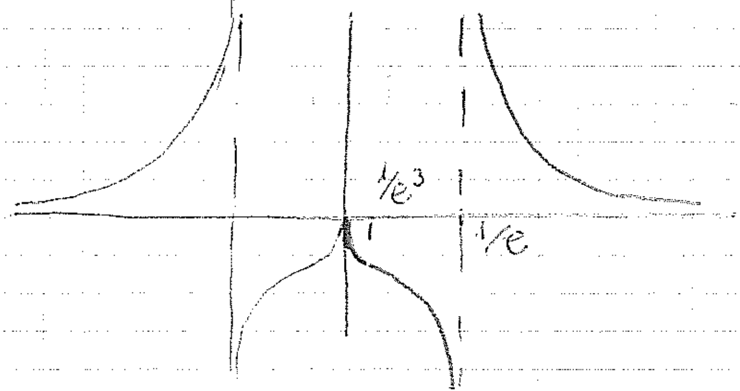
$$= \frac{48}{99}\frac{P(A)}{P(B)} = [\text{punto b}]\ \frac{48}{99}\binom{100}{40}p^{40}(1-p)^{60} = [\text{p. a}]\ \frac{48}{99}\frac{\binom{100}{40}p^{40}(1-p)^{60}}{2p(1-p)}$$

=

6) $f(x) = \frac{1}{1+\lg|x|}$

- $f(x) = f(-x)$
- per $x \geq 0$ definita $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{e}$
- $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0 \iff 1+\lg x \geq 0 \iff \lg x \geq -1 \iff x \geq \frac{1}{e}$
- $\lim_{x\to 0^+} f = 0$, $\lim_{x\to \frac{1}{e}^-} f = -\infty$, $\lim_{x\to\frac{1}{e}^+} f = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f = 0$
- $f'(x)\ (x>0) = -\frac{\frac{1}{x}}{(1+\lg x)^2} < 0$, $\lim_{x\to 0^+} f' = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x}\lg x)^2} = -\infty$
- $f''(x)\ (x>0) = -\left(-\frac{(1+\lg x)^2 + 2x\frac{1+\lg x}{x}}{x^2(1+\lg x)^4}\right) = \frac{1}{x^2(1+\lg x)^4}(1+\lg x)(3+\lg x) > 0\ (x>0)$

$$\iff \begin{cases} 1+\lg x > 0 \\ 3+\lg x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \circ \begin{cases} 1+\lg x < 0 \\ 3+\lg x < 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff x > \frac{1}{e} \circ 0 < x < \frac{1}{e^3}$$



7) $x''(t) - 3x'(t) + 3x(t) = 3 \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 1$

- sol. omogenea $y'' - 3y' + 3y = 0 \quad \lambda^2 - 3\lambda + 3 = 0 \quad \lambda = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\, e^{\pm i\frac{\pi}{6}}$

$$y(t) = a e^{3/2 t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + b e^{3/2 t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

- Sol. particolare $\overline{x} \equiv 1$
- sol. generale $\tilde{x}(t) = 1 + a e^{3/2 t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + b e^{3/2 t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$
- Condizioni iniziali $x(0) = 1 \Rightarrow \tilde{x}(0) = 1 + a = 1 \Rightarrow a = 0$

$$x'(0) = 1 \Rightarrow \tilde{x}'(0) = \cancel{b\tfrac{3}{2}e^{\frac{3}{2}\cdot 0}\underbrace{\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0}_{0}} + b\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cancel{\underbrace{e^{\frac{3}{2}\cdot 0}}_{1}\underbrace{\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0}_{1}} = b\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{3/2 t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t + 1$$

8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = \left[y=\cos x \quad dy = -\sin x\,dx \quad 0 \le y \le 1 \right]$

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{1+(\cos x)} = -\int_1^0 \frac{dy}{1+y} = \int_0^1 \frac{dy}{1+y} = \lg 2$

9) a. $1 \overset{?}{=} \mathbb{P}(X$ è una potenza di 3 o X non è potenza di 3$)$

$P(X$ è una ptz di 3 o X non lo è$) =$ [eventi incompatibili]

$= \mathbb{P}(X$ è una ptz. di 3$) + P(X$ non è una ptz. di 3$) =$

$= P(X$ è una ptz. di 3$) = \mathbb{P}($esiste $n \in \mathbb{N}$ $X = 3^n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X=3^n)\right) =$

$=$ [incompatibili] $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=3^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{4^{n+1}} = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1$

b $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X=k) \overset{k=3^n}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n P(X=3^n) =$

$= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 3$