[illegible]

1° appello 31 gennaio 2011

1) $\sqrt{12} - 6i = z \quad |z| = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \quad z = 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{12}}{4\sqrt{3}} - \frac{6}{4\sqrt{3}}i\right) =$

$= 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{4\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)}$

$e^{\log 4 + i\frac{5}{6}\pi} = e^{\log 4}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = \boxed{-2\sqrt{3} + 2i}$

2) $x = (-1, 1, 3, 9, 21) \qquad y = (9, 0, -1, -2, 10)$

m	$\frac{33}{5}$	$\frac{16}{5}$
x^2	$1, 1, 9, 81, 441$	$y^2 \quad 81, 0, 1, 4, 100$
V	$\frac{533}{5} - \frac{1089}{25} = \frac{1576}{25}$	$\frac{186}{5} - \frac{256}{25} = \frac{674}{25}$

xy $\qquad -9, 0, -3, -10, 210$

cov $\qquad \frac{188}{5} - \frac{528}{25} = \frac{412}{25}$

corr $\qquad \frac{412}{\sqrt{1576}\sqrt{674}} = \frac{130}{\sqrt{197}\sqrt{337}} = \frac{130}{\sqrt{66389}} = \frac{130}{257{,}66063} \simeq \boxed{0{,}5045}$

3) a, b $\quad P_1 = \left(1 \pm \frac{1}{100}, 1 \pm \frac{5}{100}\right) \qquad x = v \pm e, \quad e_r = \frac{e}{v} \quad \left(\begin{smallmatrix} v > e \\ e, v > 0\end{smallmatrix}\right)$

$P_2 = \left(2 \pm \frac{2}{100}, 3 \pm \frac{15}{100}\right) \qquad e = v e_r$

$P_3 = \left(3 \pm \frac{3}{100}, 4 \pm \frac{20}{100}\right)$ le coordinate rispetto a P_1 sono valutate

$\overline{P_1P_2} = \left(1 \pm \frac{3}{100}, 2 \pm \frac{20}{100}\right)$

$\overline{P_1P_3} = \left(2 \pm \frac{4}{100}, 3 \pm \frac{25}{100}\right)$

affinché non vi sia allineamento basta che il determinante $\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3}$ non possa cambiare segno

$D = \left(1 \pm \frac{3}{100}\right)\left(3 \pm \frac{25}{100}\right) - \left(2 \pm \frac{20}{100}\right)\left(2 \pm \frac{4}{100}\right) = 3 + 75\cdot 10^{-4} \pm \frac{34}{100} - 4 - 80\cdot 10^{-4} \pm \frac{48}{100}$

$\leq -1 + 160\cdot 10^{-4} + \frac{82}{100} \leq -1 + 200\cdot 10^{-4} + \frac{82}{100} = -1 + \frac{84}{100} < 0$

NON POSSONO ESSERE ALLINEATI

$D = -1 - 5\cdot 10^{-4} \pm \frac{48}{100} = -1 \pm \frac{49}{100} \qquad e_{rel} = \frac{\frac{49}{100}}{1} = \boxed{49\%}$

4) Sia R la ricchezza totale, P la popolazione

$$RM = \text{ricchezza media} = \frac{R}{P}$$

$$RaM = \text{ricchezza media dei "ricchi"} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{P}{10}} = \frac{R}{P} \cdot 5$$

percentuale della ricchezza media dei ricchi rispetto alla media =

$$= \frac{RaM}{RM} \cdot 100 = 500$$

5) $$f(x) = \sin(\sin x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \qquad \sin x = y \quad x=0 \Rightarrow y=0$$

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + O(y^5)$$

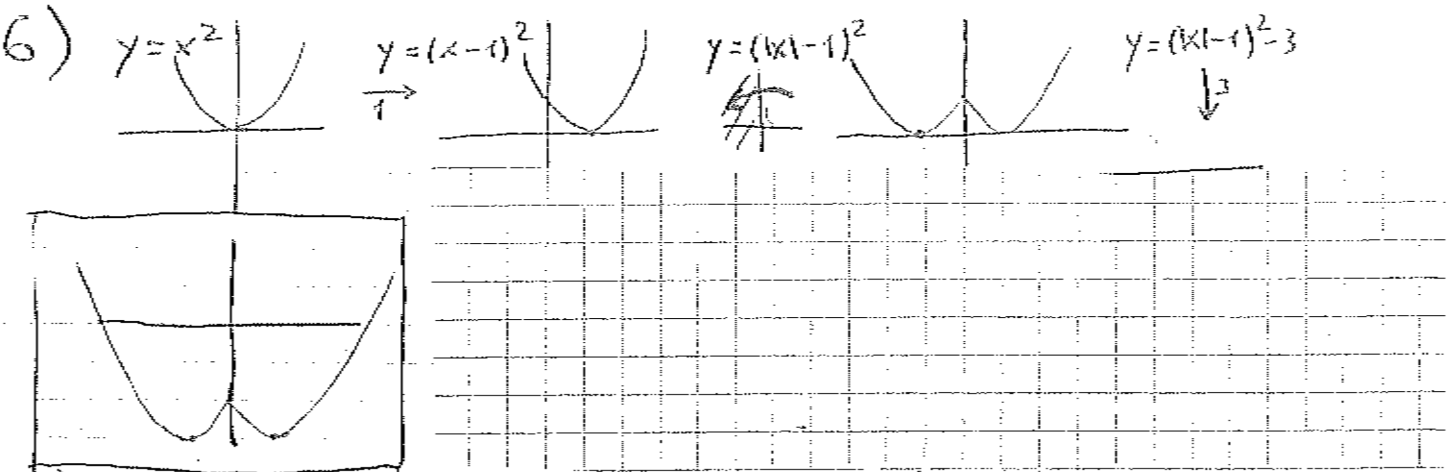
$$f(x) = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{6} + O(x^5) = \qquad \sin x = O(x)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)^3 + O(x^5) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + O(x^5) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

il polinomio cercato è per unicità $\boxed{x - \frac{x^3}{3}}$.

6)



7) • omogenea $y'' - 2y' + y = 0 \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

$$y(t) = ae^t + bte^t = (a+bt)e^t$$

• Particolare: per tentativi $z(t) \equiv 2 \quad z' = z'' = 0$

• $\tilde{x}(t) = (a+bt)e^t + 2 \qquad \tilde{x}'(t) = (a+b+bt)e^t$

• condizioni iniziali $\tilde{x}(0) = ae^0 + 2 = a+2$, $\tilde{x}'(0) = a+b$

$\tilde{x}(0) = a+2 = 1 \qquad a = -1$

$\tilde{x}'(0) = a+b = 1 \qquad b = 2$

$$\boxed{x(t) = (2t-1)e^t + 2}$$

8) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+(\cos x)^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x}{1+(\cos x)^2}\,dx =$$

$$= \left[z=\cos x \quad dz=-\sin x\,dx \quad 0\le z\le 1\right] \; 2\int_0^1 \frac{z\,dz}{1+z^2} =$$

$$= \left[y=z^2 \quad dy = 2z\,dz \quad 0\le y\le 1\right] \; \int_0^1 \frac{dy}{1+y} =$$

$$= \log(1+y)\Big]_0^1 = \boxed{\lg 2}$$

9) a. Sia C la variabile aleatoria che dà il numero di individui catturati. Se p è la probabilità che il singolo individuo sia catturato si ha che C ha distribuzione binomiale $(1000, p)$ pensando indipendenti le catture di uno e dell'altro. Quindi

$$\mathbb{P}(C=k) = \binom{1000}{k} p^k (1-p)^{1000-k} \quad e \quad \langle C\rangle = 1000p$$

ma per ipotesi $\langle C\rangle = \frac{5}{1000}\cdot 1000 = 5$ quindi $p=\frac{5}{1000}$

Per cui $\mathbb{P}(C=k) = \binom{1000}{k}\left(\frac{5}{1000}\right)^k\left(\frac{995}{1000}\right)^{1000-k}$

Sia M la v.a. del numero di individui marcati e catturati

$$0\le h\le 60 \quad \mathbb{P}(M=h) = \sum_{940+h\ge k\ge h} \mathbb{P}(M=h/C=k)\,\mathbb{P}(C=k) =$$

$$= \sum_{940+h\ge k\ge h} \frac{\binom{60}{h}\binom{940}{k-h}}{\cancel{\binom{1000}{k}}} \cancel{\binom{1000}{k}}\left(\frac{5}{1000}\right)^k\left(\frac{995}{1000}\right)^{1000-k} =$$

$$= \binom{60}{h}\left(\frac{5}{1000}\right)^h\left(\frac{995}{1000}\right)^{60-h} \sum_{940+h\ge k\ge h} \binom{940}{k-h}\left(\frac{5}{1000}\right)^{k-h}\left(\frac{995}{1000}\right)^{940-(k-h)} = [k-h=n]$$

$$= \binom{60}{h}\left(\frac{5}{1000}\right)^h\left(\frac{995}{1000}\right)^{60-h} \sum_{n=0}^{940} \binom{940}{n}\left(\frac{5}{1000}\right)^n\left(\frac{995}{1000}\right)^{940-n} =$$

$$= \binom{60}{h}\left(\frac{5}{1000}\right)^h\left(\frac{995}{1000}\right)^{60-h}\left(\frac{5}{1000}+\frac{995}{1000}\right)^{940} = \binom{60}{h}\left(\frac{5}{1000}\right)^h\left(\frac{995}{1000}\right)^{60-h}$$

è cioè una binomiale di parametri 60 e $\frac{5}{1000}$.

b. $$\mathbb{P}(C=M) = \sum_{h=0}^{1000} \mathbb{P}(C=M/C=h)\,\mathbb{P}(C=h) = \sum_{h=0}^{1000} \mathbb{P}(M=h/C=h)\,\mathbb{P}(C=h)$$

$$= \sum_{h=0}^{60} \mathbb{P}(M=h/C=h)\,\mathbb{P}(C=h) = \sum_{0\le h\le 60} \frac{\binom{60}{h}}{\cancel{\binom{1000}{h}}} \cancel{\binom{1000}{h}}\left(\frac{5}{1000}\right)^h\left(\frac{995}{1000}\right)^{1000-h} = \left(\frac{995}{1000}\right)^{940}$$

Seconda soluzione per la seconda parte di a)

Sia M la v.a. che dà il numero di individui marcati e catturati. La probabilità che un singolo individuo marcato sia catturato è sempre $\frac{5}{100}$.
Per cui M è binomiale di parametri $\left(60, \frac{5}{100}\right)$