ESERCIZIO n. 1 Scrivere in forma cartesiana i numeri complessi $\frac{\overline{1-i}}{1+2i}$, $e^{\log 2 - i\frac{1}{6}\pi}$,

ESERCIZIO n. 2 Nel periodo invernale la defoliazione di un certo tipo di piante procede ad un tasso $(90 \pm 1)\%$ alla settimana. Con che errore relativo si stima la percentuale delle piante non defoliate dopo due settimane dall'inizio della spoliazione?

• ESERCIZIO n. 3 Una patologia colpisce una popolazione. Un individuo affetto da tale malanno nel 90% dei casi presenta la concentrazione di un certo enzima superiore al 60%, mentre per un individuo sano nel 50% dei casi è inferiore a questo livello. Da un test si ottiene che il 60% della popolazione presenta una concentrazione dell'enzima maggiore al 60%.
a) Qual'è la percentuale degli affetti dalla patologia?
b) Con che probabilità un'individuo che presenta una concentrazione dell'enzima superiore al 60% è affetto dalla patologia?

ESERCIZIO n. 4 Calcolare l'area del triangolo nello spazio di vertici $(1,2,3)$, $(0,3,2)$, $(-1,-2,-1)$.

ESERCIZIO n. 5 Si studi il limite del rapporto tra $x^x - 1$ e x per $x \to 0$ [Nota : $x^x = e^{x \log x}$].

ESERCIZIO n.6 Si tracci approssimativamente il grafico di $|e^{x-1} - 1|$.

• ESERCIZIO n. 7 Trovare la soluzione di $y'(x) - xy(x) = x$, $y(0) = 0$.

ESERCIZIO n.8 Si calcoli la primitiva di $x \cos x$.

• ESERCIZIO n. 9 In un urna ci sono 55 palline numerate come segue: una con 10, due con 9, tre con 8, ..., dieci con 1. Ne estraggo una. Con che probabilità ottengo un numero k? Qual'è la media del numero che ottengo?

MATEMATICA & STATISTICA PER SCIENZE ECOLOGICHE AA 2008/2009

XVI APPELLO 14 FEBBRAIO 2011

1 $\dfrac{\overline{1-i}}{\overline{1+2i}} = \dfrac{1+i}{1-2i} = (1+i)\,\dfrac{1+2i}{5} = \dfrac{1-2+i+2i}{5} = \boxed{-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i}$

$e^{\log 2 - i\frac{\pi}{6}} = e^{\log 2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(+\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \boxed{+\sqrt{3} - i}$

2 Le piante non defoliate decrescono con un tasso del $(10 \pm 1)\%$ alla settimana, quindi

$$\frac{\text{numero di piante non defoliate dopo 2 settimane}}{\text{numero di piante iniziali}} = \left(\frac{1}{10} \pm \frac{1}{100}\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{10}\left(1 \pm \frac{1}{10}\right)\right]^2 = \frac{1}{100}\left(1 \pm \frac{1}{10}\right)^2 \simeq \frac{1}{100}\left(1 \pm \frac{2}{10}\right) =$$

$= \dfrac{1}{100}(1 \pm 0{,}2)$ in percentuale $(1 \pm 0{,}2)\%$ $\boxed{e^{rel}_{rrore} = \dfrac{0{,}2}{1} = 0{,}2}$

3 M malato, E concentrazione enzima $> 60\%$

$\mathbb{P}(E/M) = \dfrac{9}{10}$ $\mathbb{P}(\text{non}E/\text{non}M) = \dfrac{1}{2}$ $\mathbb{P}(E) = \dfrac{3}{5}$

a) Si tratta di calcolare $P(M)$

avendo a disposizione $P(E/M)$ e $P(E/\text{non}M) = 1 - P(\text{non}E/\text{non}M) = \frac{1}{2}$

si ottiene la relazione

$$\frac{3}{5} = P(E) = P(E/M)\cdot P(M) + P(E/\text{non}M)(1-P(M)) =$$

$$= \frac{9}{10}P(M) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(M) =$$

$$= \frac{2}{5}P(M) + \frac{1}{2}$$

$\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{5}P(M)$ quindi $\boxed{P(M) = \dfrac{1}{4}}$

b) Si tratta di calcolare $P(M/E) = P(E/M)\dfrac{P(M)}{P(E)} =$

$$= \frac{9}{10}\,\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{3} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

4. Area triangolo $= \frac{1}{2}$ area parallelogramma $=$

$= \frac{1}{2}$ |prodotto vettore dei vettori individuati da due lati concorrenti|

Area triangolo di vertici $(1, 2, 3), (0, 3, 2), (-1, -2, -1) =$

$=$ Area triangolo di vertici $(0, 0, 0), (-1, 1, -1), (-2, -4, -4)$

$$= \frac{1}{2} \left| (-1, 1, -1) \times (-2, -4, -4) \right| = \qquad \begin{matrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \\ -1 & -4 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^2 + \det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^2} = \qquad \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4 + 64} = \frac{1}{2} \sqrt{104} = \sqrt{26} \simeq 5,1$$

5. $x^x = e^{x \lg x} \quad (x > 0)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{x \lg x} - 1}{x} \overset{\text{Hosp.}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + \lg x) e^{x \lg x} =$$

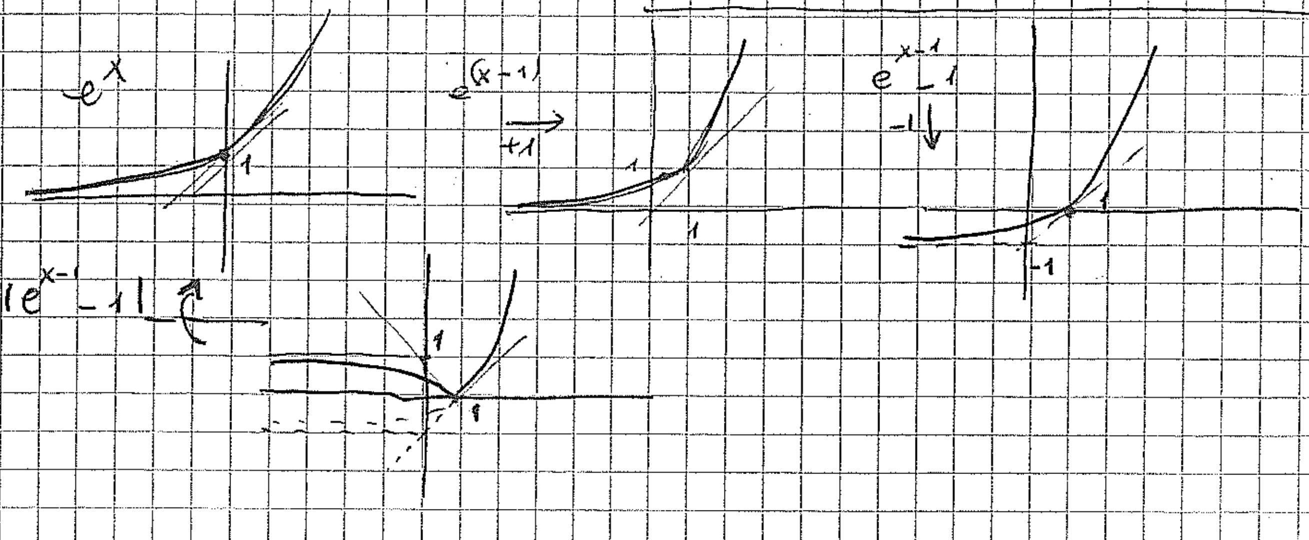
$$= \left[\text{poiché } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \lg x = 0 \text{ si ha } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{x \lg x} = 1 \right]$$

$$= 1 \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 + \lg x = -\infty$$

ALTRO METODO $x \lg x = y \to 0$ se $x \to 0$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1 \cdot \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\cancel{x} \lg x}{\cancel{x}} = -\infty}$$

6



7 $y'(x) - x\,y(x) = x \qquad y(0)=0$

$\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$

moltiplicando per $e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\left(y(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

integrando

$$y(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}} = \int_0^x t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + c$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + c\,e^{\frac{x^2}{2}} =$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^{\frac{x^2}{2}} e^{-y}\,dy + c\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

$y = \frac{t^2}{2}$

$0 \le y \le \frac{x^2}{2}$

$dy = t\,dt$

$$= e^{\frac{x^2}{2}}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}} + 1\right) + c\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} - 1 + c\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

imponendo $y(0) = e^0 - 1 + c\,e^0 = 0$ si ottiene $c=0$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

8 $\int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{\cos x} = \underset{f\,g}{x \sin x} - \int \underset{f'\,g}{1 \cdot \sin x} = x\sin x + \cos x + c$

9 $\quad \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\#\text{ favorevoli}}{\#\text{ possibili}} = \dfrac{\text{numero palline con } k}{\text{numero totale palline}} =$

		N° palline	
$k=$	10	1	$= 10-9$
	9 9	2	$= 10-8$
	8 8 8	3	$= 10-7$
	7 7 7 7	4	$= 10-6$
	6 6 6 6 6	5	$= 10-5$
	5 5 5 5 5 5	6	$= 10-4$
	4 4 4 4 4 4 4	7	$= 10-3$
	3 3 3 3 3 3 3 3	8	$= 10-2$
	2 2 2 2 2 2 2 2 2	9	$= 10-1$
$k=$	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	10	$= 10-0$
		55	

$10-(k-1)$

$$= \begin{cases} 0 & k \leq 0 \\ \dfrac{10-k+1}{55} & 1 \leq k \leq 10 \\ 0 & k \geq 11 \end{cases}$$

$$\langle X \rangle = \sum_{k} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{10} k\,\frac{11-k}{55} = \sum_{k=1}^{10} k\left(\frac{1}{5}-\frac{k}{55}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{10} k - \frac{1}{55}\sum_{k=1}^{10} k^2 =$$

$$= \frac{55}{5} - \frac{1}{55}(1+4+9+16+25+36+49+64+81+100)$$

$$= 11 - \frac{385}{55} = 11 - \frac{77}{11} = 4$$