SOLUZIONI DEI QUESITI DELLA PROVA SCRITTA DEL V APPELLO

1. $\begin{cases} 1-\cos^2 x \geq 0 \\ 1-|3^x-2| \underset{\neq 0}{\geq} \end{cases} \sim \begin{cases} 1 \geq \cos^2 x \\ 1 \underset{\neq}{\geq} |3^x-2| \end{cases} \sim 1 \underset{\neq}{\geq} |3^x-2| \sim 1 \underset{\neq}{\geq} 3^x-2 \underset{\neq}{\geq} -1 \sim 3 \underset{\neq}{\geq} 3^x \underset{\neq}{\geq} 1 \sim 1 \underset{\neq}{\geq} x \underset{\neq}{\geq} 0$

2. $Vol = c\,Rag^3 \quad e_{rel.vol} = \dfrac{Vol_{MAX}-Vol_{MIN}}{Vol_{MAX}+Vol_{MIN}} = \dfrac{R^3_{MAX}-R^3_{MIN}}{R^3_{MAX}+R^3_{MIN}} = \dfrac{1-\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}} = \dfrac{8-1}{8+1} = \dfrac{7}{9} = 0,\overline{7} \sim 0,8$

3. Sia T_k = numero risposte giuste al $k°$ tentativo, $P(T_k = a) = P(T_1 = a)$.

Si tratta di calcolare $P(T_1 \geq 3 \text{ o } (T_1<3 \text{ e } T_2 \geq 3) \text{ o } \dots \text{ o } (T_1<3 \text{ e } \dots \text{ e } T_{n-1}<3 \text{ e } T_n \geq 3)) =: P_n$

Conviene chiamare $p = P(T_1<3) = \binom{6}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^6 + \binom{6}{1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \binom{6}{2}\frac{1}{3^2}\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 + 6\,\frac{2^5}{3^6} + 15\,\frac{2^4}{3^6} =$

$= \frac{2^4}{3^6}(4+12+15) = \frac{16}{729}\cdot 31 = \frac{496}{729} \sim 0,68$

Quindi

$P_n \underset{\text{EVENTI INCOMPATIBILI}}{=} P(T_1 \geq 3) + P(T_1<3 \text{ e } T_2 \geq 3) + \dots + P(T_1<3 \text{ e } \dots \text{ e } T_{n-1}<3 \text{ e } T_n \geq 3) \underset{\text{EVENTI INDIPENDENTI}}{=}$

$= P(T_1 \geq 3) + P(T_1<3)P(T_2 \geq 3) + \dots + P(T_1<3)P(T_2<3)\dots P(T_{n-1}<3)P(T_n \geq 3) =$

$= P(T_1 \geq 3) + P(T_1<3)P(T_1 \geq 3) + \dots + P(T_1<3)P(T_1<3)\dots P(T_1<3)P(T_1 \geq 3) =$

$= P(T_1 \geq 3)(1 + p + \dots + p^{n-1}) = (1-p)(1+\dots+p^{n-1}) = (1-p)\frac{1-p^n}{1-p}$

$= 1-p^n \simeq 1-(0,68)^3 \simeq 1-0,3 = 0,7$

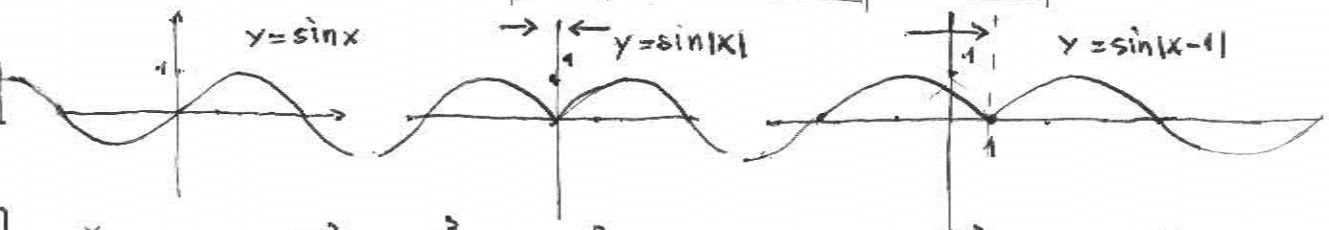
4. $\log_2 y = \log_2 a + x\log_2 b$

					m	σ^2
x	1	2	8	9	5	50/4
y	8	8	2	2	–	–
$\log_2 y$	3	3	1	1	2	1
$x\log_2 y$	3	6	8	9	13/2	–

$Cov(x,\log_2 y) = \frac{13}{2} - 10 = -\frac{7}{2}$

$\rho(x,\log y) = -\frac{7}{\sqrt{50}} \sim -0,9$

5.



6. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$x + x^2 + \frac{x^3}{6}$

7. $\int_1^2 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[y = \frac{x^2}{2},\ dy = x\,dx,\ \frac{1}{2} \leq y \leq 2\right] = \int_{1/2}^2 e^{-y} dy = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e^2}$

8. $y''(x) + y(x) = 0 \quad \lambda^2 = -1 \quad \lambda = \pm i \quad \tilde{y}(x) = a\cos x + b\sin x \quad \tilde{y}'(x) = -a\sin x + b\cos x \quad y(0) = a = 1 \quad y'(0) = b = 1 \quad y(x) = \cos x + \sin x$

9. $(x-3)\cdot 1 + (y-2)\cdot 2 + (z-1)\cdot 3 = 0 \qquad x + 2y + 3z = 10$

$\boxed{10}$ a- $y'(x) = -2xe^{-x^2}$, $y''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2x)e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2-1) \geq 0 \iff$

$\iff 2x^2 \geq 1 \iff x^2 \geq \frac{1}{2} \iff x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ o $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

L'intervallo di concavità per $x \geq 0$ è quindi $[0; 1/\sqrt{2}]$, $p = 1/\sqrt{2}$

b- La retta tangente in $(p, f(p))$ è, visto che $y'(1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$:

$y = -\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + e^{+\frac{1}{2}}$ cioè $e^{\frac{1}{2}} y + \sqrt{2}\, x = 2$

che interseca l'asse orizzontale per $x = \sqrt{2}$ $(y = 0)$.

Area triangolo $= \frac{1}{2}$ base . altezza $= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{2\sqrt{2e}}$

c- Conviene ottenere lo sviluppo di $y = e^{-x^2}$ da quello di e^t per unicità, $t = -x^2$

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^k}{k!} + \frac{e^\theta}{(k+1)!} t^{k+1}$ RESTO DI LAGRANGE CON θ TRA 0 E t $(\theta = \theta(k,t))$

QUINDI

$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + \dots \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} + \frac{e^{\bar\theta}(-1)^{k+1}}{(k+1)!} x^{2k+2}$ $\bar\theta$ tra 0 e $-x^2$

Si impone che l'integrale del resto sia più piccolo di 10^{-3} in valore assoluto, e si cerca k che soddisfi la diseguaglianza

$$\left| \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{2k+2} e^{\bar\theta(x)} dx \right| = \frac{1}{(k+1)!} \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{2k+2} e^{\bar\theta(x)} dx$$

poichè si sa solo che $\bar\theta < 0$ si semplifica usando $e^{\bar\theta(x)} \leq 1$

$$\leq \frac{1}{(k+1)!} \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{2k+2} dx = \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{2k+3} \frac{1}{2^{k+\frac{3}{2}}}$$

$k=0$ $\quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} > \frac{1}{1000}$ $\qquad k=1$ $\quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} > \frac{1}{1000}$

$k=2$ $\quad \frac{1}{3\cdot 2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{168} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{336} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{1000}$

$k=3$ $\quad \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2} \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{216} \cdot \frac{1}{16 \cdot \sqrt{2}} < \frac{1}{1000}$

Quindi $\int_0^{1/\sqrt{2}} e^{-x^2} dx$ è approssimato a meno di 10^{-3}

da $\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{10} \frac{1}{\sqrt{32}} - \frac{1}{42} \frac{1}{\sqrt{128}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \frac{1}{4} - \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{5}{6} + \frac{37}{1680}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{5 \cdot 280 + 37}{6 \cdot 280}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1437}{1680} = \sqrt{2} \cdot \frac{1437}{3360} = (1.4142 \pm 2 \cdot 10^{-4})(0.4276 \pm 10^{-4})$

$= 0.6047 \pm 26 \cdot 10^{-5}$

AREA $= 0.6045 \pm 1.5 \cdot 10^{-3}$

11. a. $\mathbb{P}(P_d = k) = e^{-3d} \frac{(3d)^k}{k!}$ definizione di distribuzione di Poisson

P(che non vi siano accadimenti in un intervallo di tempo d) $= P(P_d = 0) =$
$= e^{-3d}$

b. La probabilità che tra due accadimenti consecutivi passi almeno un tempo d è proprio quella che in quel lasso di tempo non ve ne siano altri; quindi è e^{-3d}.

c. Si inizia a valutare la funzione di distribuzione di T

$f_T(t) = \mathbb{P}(T \le t) = 1 - P(T \not\geq t) =$

ma che il tempo T tra due eventi sia strettamente maggiore di t vuol dire che nell'intervallo di tempo t non ci sono eventi

$= 1 - e^{-3t}$ questo se $t > 0$

se $t \le 0$, poiché $T > 0$, si ha $f_T(t) = 0$

$$f_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-3t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$ Si noti $\mathbb{P}(T = t) = 0$.

La densità $\delta_T(t)$ dev'essere tale che

$$\int_0^t \delta_T(s)\, ds = \mathbb{P}(0 < T \le t) = f_T(t) - f_T(0) = f_T(t) \quad (*)$$

Per $t > 0$ si osserva che $f_T'(t) = 3e^{-3t}$ è una funzione continua, quindi vale la relazione $(*)$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale

Per $t \le 0$ basta porre $\delta_T = 0$

$$\delta_T(t) = \begin{cases} 3e^{-3t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

La media di T è quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} s\, \delta_T(s) ds =$

$$= \int_0^{+\infty} 3s\, e^{-3s} ds = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c e^{-3s} \cdot 3 \cdot s\, ds = \lim_{c \to +\infty} -c e^{-3c} + 0 \cdot e^{-3 \cdot 0} + \int_0^c e^{-3s} ds =$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \int_0^c e^{-3s} ds = \lim_{c \to +\infty} -\frac{1}{3} e^{-3c} + \frac{1}{3} e^{-3 \cdot 0} = \frac{1}{3}$$

d. $\mathbb{P}(T \geq 5 / T > 2) = \frac{P(T \geq 5 \text{ e } T > 2)}{P(T > 2)} = \frac{P(T \geq 5)}{P(T > 2)} = \frac{e^{-3 \cdot 5}}{e^{-3 \cdot 2}} = e^{-9} = P(T \geq 3)$